Université d'Evry Val d'Essonne
L1 PC-SPI - Année universitaire 2012/2013

Modélisation et Simulation - MOS21

TP1 - Méthodes de Monte-Carlo

Consignes :

- tout document (cours, internet...) autorisé,
- une partie de la note est liée à l'atteinte des objectifs durant la séance,
- l'autre partie porte sur le compte-rendu qui sera transmis en début de séance suivante,
- le compte-rendu détaillera de manière concise et pertinente la démarche de modélisation.

1/ Fonction ζ de Riemann

Cette fonction est notamment utilisée en théorie des nombres afin d'accéder à des informations concernant la répartition des nombres premiers. Il s'agit d'une fonction analytique dans le plan complexe privé de singularités isolées. Sa définition peut prendre la forme de la série suivante :

$$\zeta(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^n} \tag{1}$$

définie pour $n \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(n) > 1$.

On s'intéresse ici plus particulièrement à $\zeta(4)$ définie par :

$$\zeta(4) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} \tag{2}$$

Cette série tronquée à son m^{ieme} terme est représentée par la sommation finie :

$$\zeta_m(4) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i^4} \tag{3}$$

Cet exercice constitue un simple échauffement et ne réclame par l'emploi de méthodes de Monte-Carlo.

1.1 Représenter la courbe $\zeta_m(4) = f(m)$ et décrire son allure.

1.2 A partir de quelle valeur de m observe-t-on une convergence de la valeur de $\zeta_m(4)$ Vous définirez le critère de convergence considéré et donnerez l'approximation de $\zeta(4)$ associée.

2/ Conception d'un Questionnaire à Choix Multiples - QCM

On se propose ici de simuler la manière dont un étudiant, n'ayant pas révisé ses cours, répond à un QCM d'examen en faisant confiance au hasard. Ce QCM comprend 20 questions avec chacune 3 choix possibles dont un seul est juste. L'étudiant a le droit à un unique choix par question. Chaque bonne réponse rapporte 1 point (total donc ≤ 20).

A l'aide de procédures basées sur une approche de Monte-Carlo :

2.1 Déterminer une approximation de la note que peut espérer l'étudiant en répondant de manière aléatoire.

2.2 Etudier la variabilité de cette approximation en fonction du nombre de tirages de Monte-Carlo réalisés (une représentation graphique serait la bienvenue).

Le professeur trouvant cette note obtenue au hasard bien trop élevée, il décide d'attribuer un malus (ie points négatifs) à chaque mauvaise réponse. Ainsi, pour un malus s'élevant par exemple à -1 point, si l'étudiant donne 11 réponses justes et 9 réponses erronées, sa note sera de $11 * 1 + 9 * (-1) = 2/20$.

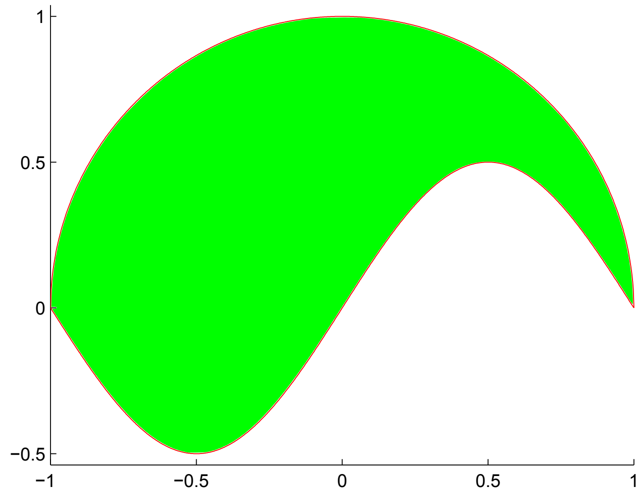
2.3 Quelle valeur donner au malus (nombre réel négatif) pour garantir une note nulle en moyenne pour des réponses données au hasard ?

3/ Aire et centre de gravité d'une surface complexe

On définit la surface S du plan comme :

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in [-1, 1], \frac{1}{2}\sin(\pi\, x) \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\} \tag{4}$$

Cette surface peut ainsi avoir comme représentation graphique :



A l'aide de procédures basées sur une approche de Monte-Carlo :

3.1 Déterminer une approximation de l'aire de cette surface.

3.2 Etudier l'influence du nombre de tirages de Monte-Carlo sur la variabilité de cette approximation.

3.3 Déterminer une approximation de la position du centre de gravité de cette surface. On rappellera à cette fin que le centre de gravité (x_G, y_G) d'une surface S se définit analytiquement selon :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{\int_S x\, dS}{\int_S dS} \\ y_G &= \frac{\int_S y\, dS}{\int_S dS} \end{aligned} \tag{5}$$

Dans le cadre d'une approche de Monte-Carlo, si les points $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,N}$ sont situés à l'intérieur de la surface, les coordonnées du centre de gravité peuvent s'approximer selon :

$$\begin{aligned} x_G &\simeq \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \\ y_G &\simeq \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} \end{aligned} \tag{6}$$