Université d'Evry Val d'Essonne

L1 Sciences Pour l'Ingénieur

EC222 - Modélisation et Simulation
Exercices

Gaëtan Hello
gaetan.hello@univ-evry.fr

Février 2017

Table des matières

Chapitre 1

Introduction à la modélisation

1.1 Questions de cours

— Définir la notion de modèle dans le contexte des sciences physiques.
— Rappeler les trois différents types de modèles qu'il est possible d'aborder successivement pour traiter un problème en sciences physiques.
— Donner, expliquer et illustrer deux fonctions attendues d'un modèle.

Chapitre 2

Equations pour la physique

2.1 Questions de cours

— Donner quatre paramètres physiques susceptibles d'influencer la force de frottement s'exerçant sur un boulet en déplacement dans l'air.

— Rappeler l'expression de la force de frottement dans le cas du modèle de Stokes. En quoi s'agit-il d'un modèle ? Donner la dimension du coefficient k.

— Appliquer le PFD à un boulet de canon en mouvement dans l'air et soumis à son poids propre ainsi qu'au frottement fluide représenté par le modèle de Stokes. Donner les équations différentielles à résoudre. En quoi peut-on dire que ces équations sont découplées ?

— Donner les unités SI pour les grandeurs de force, masse, longueur, temps.

— Exprimer les quantités physiques suivantes au moyen des unités SI de force, masse, longueur, temps : vitesse, accélération, pression, masse volumique, angle, énergie (travail).

— Donner l'expression reliant les grandeurs de force, masse, longueur et temps.

2.2 Unités 1

Si un modèle physique fait intervenir des force, masse et longueur exprimées respectivement en N, kg et mm, quelle est alors l'unité de temps cohérente ?

Solution : 6.1

2.3 Unités 2

Dans le système anglo-saxon, la pression est mesurée en psi (pound per square inch). Celle-ci s'exprime en livre-force (noté lbf) par pouce carré (noté in^2). Sachant qu'une livre-force équivaut à 4.448 N et qu'un pouce équivaut à 2.54 cm, exprimer une pression de 1 psi en Pascal.

Solution : 6.2

2.4 Equation différentielle 1

Résoudre :

$$\frac{dC}{dt}(t) + a \cdot C(t) = b$$
$$C(t=0) = C_0$$

Solution : 6.3

2.5 Equation différentielle 2

Résoudre :

$$
\begin{aligned}
m \cdot \ddot{x}_1(t) &= -k \cdot \dot{x}_1(t) \\
x_1(t=0) &= x_1^0 \\
\dot{x}_1(t=0) &= \dot{x}_1^0
\end{aligned}
$$

Solution : 6.4

2.6 Modélisation du frottement par le modèle de Stokes

Equations du mouvement avec prise en compte du poids seul :

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \dot{x}_1^0 \cdot t + x_1^0 \\
x_2(t) &= -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + \dot{x}_2^0 \cdot t + x_2^0
\end{aligned}
$$

Equations du mouvement avec prise en compte du poids propre et du frottement fluide selon le modèle de Stokes :

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \dot{x}_1^0 \cdot \frac{m}{k} \cdot \left[1 - exp\left(-\frac{k}{m} \cdot t\right)\right] + x_1^0 \\
x_2(t) &= (\dot{x}_2^0 + \frac{m \cdot g}{k}) \cdot \frac{m}{k} \cdot \left[1 - exp\left(-\frac{k}{m} \cdot t\right)\right] - \frac{m \cdot g}{k} \cdot t + x_2^0
\end{aligned}
$$

Que se passe t-il lorsque $t \to +\infty$ avec chacune des approches pour $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\dot{x}_1(t)$, $\dot{x}_2(t)$? Bien commenter vos résultats d'un point de vue physique.

Solution : 6.5

2.7 Analyse dimensionnelle 1

On souhaite exprimer, au moyen d'une analyse dimensionnelle, l'intensité f de la force de frottement exercée sur un solide sphérique en mouvement dans un fluide.

Les paramètres influents retenus sont :
- le rayon du boulet R,
- la vitesse relative entre fluide et solide v,
- la masse volumique du fluide ρ,
- la viscosité dynamique du fluide μ (en Pa.s).

Il est fait l'hypothèse que la loi prend la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
f &= g(R, v, \rho, \mu) \\
f &= \lambda \cdot R^\alpha \cdot v^\beta \cdot \rho^\gamma \cdot \mu^\delta, \ \lambda \text{ sans dimension}
\end{aligned}
$$

Déterminer alors les valeurs à donner à α, β, γ (penser à tenir compte de la relation entre force, masse, longueur et temps). Commenter alors ce résultat d'un point de vue physique.

Solution : 6.6

2.8 Analyse dimensionnelle 2

Un projectile est lancé verticalement de bas en haut. Moyennant l'hypothèse que seul le poids propre s'exerce sur le solide, déterminer par analyse dimensionnelle l'altitude maximale atteinte h en tenant compte de la vitesse initiale v, de l'accélération de la pesanteur g et de la masse m du projectile.

Solution : 6.7

2.9 Analyse dimensionnelle 3

Un solide de masse m est lâché sans vitesse initiale à une altitude h dans un champ de pesanteur d'intensité g. Exprimer par analyse dimensionnelle la vitesse atteinte lorsque le solide touche le sol.

Solution : 6.8

2.10 Analyse dimensionnelle 4

Un solide de masse m est lâché sans vitesse initiale à une altitude h dans un champ de pesanteur d'intensité g. Exprimer par analyse dimensionnelle l'énergie E atteinte lorsque le solide touche le sol.

Solution : 6.9

2.11 Analyse dimensionnelle 5

Un solide de masse m est llâché sans vitesse initiale dans le vide. Il subit les effets de son poids propre (accélération de la pesanteur d'intensité g) et du frottement exercé par le fluide (modèle de Stokes paramétré par k). Exprimer par analyse dimensionnelle la vitesse limite v atteinte lors de la chute libre.

Solution : 6.10

2.12 Analyse dimensionnelle 6

Un ressort sans masse de raideur k et de longueur à vide l_0 est accroché au plafond. Un poids de masse m est ensuite accroché à l'extrémité libre du ressort. Déterminer au moyen d'une analyse dimensionnelle la position d'équilibre x^* du système soumis au champ de pesanteur terrestre d'accélération g.

Solution : 6.11

Chapitre 3

Optimisation continue

3.1 Questions de cours

- Rappeler les notion de fonction objectif, paramètres d'optimisation, domaine de conception.
- Dans le contexte de la conception d'un nouveau véhicule automobile, expliquer une possible démarche d'optimisation (fonction objectif, paramètres, espace de conception).
- Expliquer la notation $x^* = \underset{x \in D}{\operatorname{argmin}} f(x)$.
- Rappeler en quoi consiste la condition nécessaire d'optimalité pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. L'illustrer graphiquement.
- Rappeler précisément le principe de l'algorithme de la dichotomie appliqué à la résolution de l'équation scalaire $f(x) = 0,\ x \in [a, b]$.
- Rappeler précisément le principe de l'algorithme de Newton-Raphson appliqué à la résolution de l'équation scalaire $f(x) = 0,\ x^0$ donné. Démontrer notamment la relation de récurrence $x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$.

3.2 Exercice 1

Une ferme est située au centre d'un champ de blé circulaire (rayon R). D'un point de vue économique, le gain surfacique du champ est constant et vaut a tandis que le coût surfacique pour ramener cette production à la ferme évolue linéairement en $b \cdot r$ (plus la récolte est loin de la ferme et plus il est onéreux de l'y ramener). Quelles sont les dimensions de a et b ? Quel est le rayon optimal R^* du champ maximisant le bénéfice ?

Solution : 6.12

3.3 Exercice 2

Un ressort sans masse de raideur k et de longueur à vide l_0 est accroché au plafond. Un poids de masse m est ensuite accroché à l'extrémité libre du ressort. On se propose de déterminer la position d'équilibre x^* du système soumis au champ de pesanteur terrestre d'accélération g (pour simplifier les calculs, on pourra considérer le vecteur de base $\vec{e}_x$ selon la verticale et du haut vers le bas). Trouver la solution par application du principe fondamental de la statique puis par application du principe de minimisation de l'énergie potentielle totale (énergie potentielle de pesanteur de la masse + énergie de déformation élastique du ressort).

Solution : 6.13

3.4 Exercice 3

Deux ressorts sans masse de raideurs k_1, k_2 et de longueur à vide L_{01}, L_{02} sont reliés à l'une de leurs extrémités respectives. Les deux extrémités restantes sont ensuite accrochées de sorte que la distance entre celles-ci soit L. On fait l'hypothèse que les deux ressorts restent parfaitement alignés. Déterminer la position d'équilibre x^* du système par application du principe fondamental de la statique puis du principe de minimisation de l'énergie potentielle totale (énergies de déformation élastique des deux ressorts).

Solution : 6.14

3.5 Exercice 4

Une tige sans masse indéformable de longueur L est liée à un bâti au moyen d'un ressort de torsion de raideur C et d'angle à vide θ_0. A sa seconde extrémité est accroché un poids de masse m. Ce système est soumis à l'accélération de la pesanteur terrestre d'intensité g. En supposant que le mouvement a lieu dans le plan $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ (par exemple avec $\vec{e}_x$ vertical de haut en bas), exprimer l'équation non-linéaire vérifiée par la position d'équilibre θ^* du système par application du principe fondamental de la statique (somme des moments nuls) puis du principe de minimisation de l'énergie potentielle totale (énergie potentielle de pesanteur de la masse + énergie de déformation élastique du ressort).

Solution : 6.15

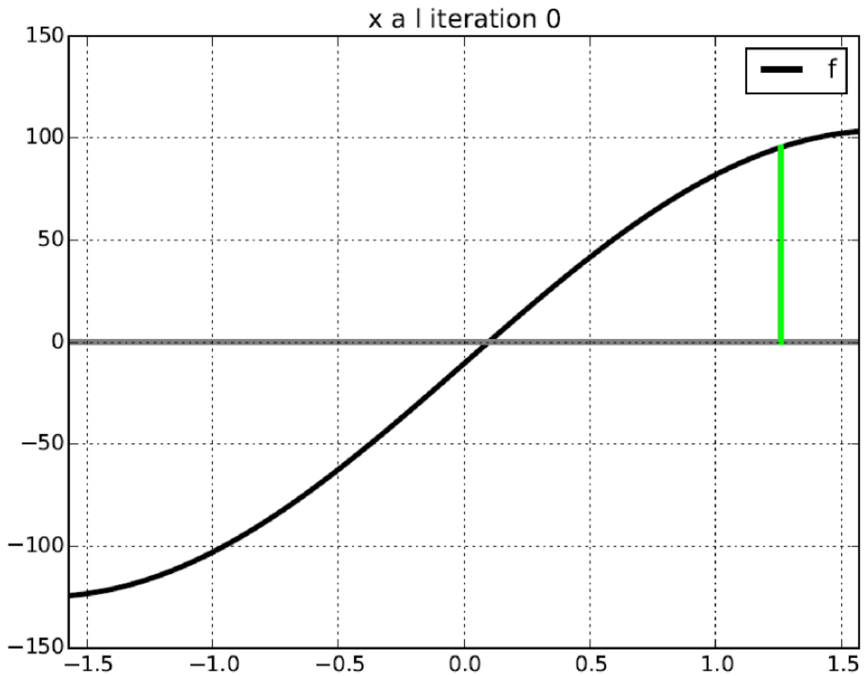
3.6 Algorithme 1

Compléter ce pseudo-code de l'algorithme de la dichotomie :

```
input : a, b, epsilon, fonction f(x)
fa=f(a), fb=f(b)
while      >epsilon
    c=
    fc=f(c)
    if            #changement de signe sur [a;c]
        b=
        fb=
    else #changement de signe sur [c;b]
        a=
        fa=
    endif
endwhile
```

3.7 Algorithme 2

Appliquer graphiquement 3 fois le processus de Newton-Raphon en précisant bien les positions x^0, x^1, x^2 et x^3 sur l'axe des abscisses :


x a l iteration 0
f
150
100
50
0
−50
−100
−150
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5

Chapitre 4

Optimisation combinatoire

4.1 Questions de cours

- Définir la notion d'optimisation combinatoire.
- Rappeler le principe du "problème du voyageur de commerce" (TSP).
- Démontrer que la complexité d'un algorithme naïf visant à résoudre le TSP est $o(n!)$ pour n villes.
- Pour $n = 4$ villes (V_1, V_2, V_3 et V_4), lister l'ensemble des trajets possibles du TSP. Combien y en a-t-il ?

Chapitre 5

Exploitation de l'aléatoire

Chapitre 6

Solutions

$$[T] = 10^{\frac{-3}{2}}\ s \approx 0.03162\ s \tag{6.1}$$

$$1\ psi \approx 6895\ Pa \tag{6.2}$$

$$C(t) = \left(C_0 - \frac{b}{a}\right) \cdot \exp(-a \cdot t) + \frac{b}{a} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \dot{x}_1^0 \cdot \frac{m}{k} \cdot \left[1 - exp\left(-\frac{k}{m} \cdot t\right)\right] + x_1^0 \\ x_2(t) &= (\dot{x}_2^0 + \frac{m \cdot g}{k}) \cdot \frac{m}{k} \cdot \left[1 - exp\left(-\frac{k}{m} \cdot t\right)\right] - \frac{m \cdot g}{k} \cdot t + x_2^0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Pour le modèle de Stokes

$$\begin{aligned} &\lim_{t \to +\infty} x_1(t) = \dot{x}_1^0 \cdot \frac{m}{k} + x_1^0 \\ &\lim_{t \to +\infty} \dot{x}_1(t) = 0 \\ &\lim_{t \to +\infty} x_2(t) = -\infty \\ &\lim_{t \to +\infty} \dot{x}_2(t) = -\frac{m \cdot g}{k} \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$f = \lambda \cdot R^2 \cdot v^2 \cdot \rho \cdot \left(\frac{\mu}{\rho \cdot R \cdot v}\right)^{\delta} \tag{6.6}$$

$$h \propto \frac{v^2}{g} \tag{6.7}$$

$$v \propto \sqrt{g \cdot h} \tag{6.8}$$

$$E \propto m \cdot g \cdot h \tag{6.9}$$

$$v \propto \frac{m \cdot g}{k} \tag{6.10}$$

$$x^* \propto \frac{m \cdot g}{k} \tag{6.11}$$

$$R^* = \frac{a}{b} \tag{6.12}$$

$$x^* = l_0 + \frac{m \cdot g}{k} \tag{6.13}$$

$$x^* = \frac{k_1 \cdot L_{01} + k_2 \cdot (L - L_{02})}{k_1 + k_2} \tag{6.14}$$

$$C \cdot (\theta^* - \theta_0) + m \cdot g \cdot L \cdot \sin(\theta^*) = 0 \tag{6.15}$$