EC222 : Modélisation et Simulation

Résolution numérique d'équations différentielles

Gaëtan Hello

Université d'Evry Val d'Essonne
UFR Sciences et Technologies
gaetan.hello@univ-evry.fr

L1 SPI 2019-20

Trajectoire du boulet de canon avec frottement

On souhaite connaître la trajectoire d'un boulet de canon se déplaçant dans l'air. L'approche consistant à ne tenir compte que de l'effet du poids apparaît irréaliste au regard de constatations empiriques. Il convient donc alors de prendre en compte l'influence du frottement qu'exerce l'air sur le boulet.

Les concepts et outils de la mécanique du point matériel semblent adaptés à la modélisation de ce phénomène. Quelles hypothèses faut-il réaliser pour justifier l'utilisation de ce cadre théorique ?

Trajectoire du boulet de canon avec frottement

Parmi les différents paramètres influents (forme du projectile, température de l'air ...), il ressort que le plus important est la vitesse relative $\vec{v}$ entre le solide et le fluide.

En première approximation, l'action du fluide tendant à s'opposer à l'avancée du solide d'autant plus intensément que la vitesse relative est importante sera représentée par une force d'expression :

$$\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$$

Trajectoire du boulet de canon avec frottement

L'expression des forces de frottement selon $\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$ constitue le modèle de Stokes (adapté aux "faibles" vitesses). Il existe d'autres modèles pertients pour différents régime d'écoulement (turbulent $\rightarrow$ modèle de Newton). Le paramètre k agrège les effets de l'ensemble des paramètres influents négligés.

En utilisant le Principe Fondamental de la Dynamique, le phénomène peut être représenté par l'équation :

$$m \cdot \ddot{\vec{x}} = \vec{P} + \vec{f} \tag{1}$$

Ainsi en projetant dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ où $\vec{P} = -m \cdot g \cdot \vec{e}_y$ et $\vec{f} = -k \cdot \dot{\vec{x}}$, il vient :

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -k \cdot \dot{x}(t)$$
$$m \cdot \ddot{y}(t) = -m \cdot g - k \cdot \dot{y}(t)$$

1. Equations différentielles du mouvement d'un solide dans un fluide
   - Modèle de Stokes pour le frottement
   - Solutions analytiques
   - Modèle de Newton

2. Résolution numérique des équations différentielles
   - Approximation de la valeur de la dérivée
   - Schémas d'Euler explicite et implicite
   - Applications explicite et implicite pour le modèle de Stokes
   - Application explicite pour le modèle de Newton
   - Simulations numériques explicites

Solution analytique - modèle sans frottement

Système d'équations différentielles découplées avec comme conditions initiales $(x(t=0), y(t=0)) = (x_0, y_0)$ et $(\dot{x}(t=0), \dot{y}(t=0)) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0)$:

$$m \cdot \ddot{x}(t) = 0$$
$$m \cdot \ddot{y}(t) = -m \cdot g$$

Equations paramétriques du mouvement avec prise en compte du poids seul :

$$x(t) = \dot{x}_0 \cdot t + x_0$$
$$y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + \dot{y}_0 \cdot t + y_0$$

❓ les équations horaire véfifient-elles les équations différentielles et les conditions initiales ?

❓ que se passe t-il lorsque $t \to +\infty$ pour la vitesse ?

Solution analytique - modèle avec frottement de Stokes

Système d'équations différentielles découplées avec comme conditions initiales $(x(t=0), y(t=0)) = (x_0, y_0)$ et $(\dot{x}(t=0), \dot{y}(t=0)) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0)$:

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -k \cdot \dot{x}(t)$$
$$m \cdot \ddot{y}(t) = -m \cdot g - k \cdot \dot{y}(t)$$

Equations paramétriques du mouvement avec prise en compte du frottement selon le modèle de Stokes :

$$x(t) = \dot{x}_0 \cdot \frac{m}{k} \cdot \left[1 - exp\left(-\frac{k}{m} \cdot t\right)\right] + x_0$$
$$y(t) = (\dot{y}_0 + \frac{m \cdot g}{k}) \cdot \frac{m}{k} \cdot \left[1 - exp\left(-\frac{k}{m} \cdot t\right)\right] - \frac{m \cdot g}{k} \cdot t + y_0$$

❓ les équations horaire véfifient-elles les équations différentielles et les conditions initiales ?

❓ que se passe t-il lorsque $t \rightarrow +\infty$ pour la vitesse ?

paramètres (unités SI) :

$m = 10$

$g = 9.81$

$v_0 = 100$

$\alpha = 30^o$

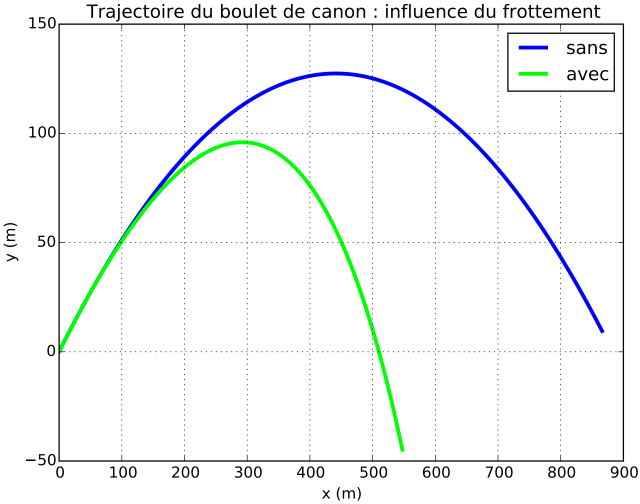
$k = 1$

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

$\dot{x}_0 = v_0 \cdot cos(\alpha)$

$\dot{y}_0 = v_0 \cdot sin(\alpha)$



Modèle de Newton

L'analyse dimensionnelle du phénomène de frottement suggère que son intensité dépend du carré de la vitesse relative. Au lieu du modèle de Stokes ($\propto \vec{v}$), il est donc possible de considérer le modèle suivant, dit modèle de Newton :

$$\vec{f} = -k \cdot \|\vec{v}\| \cdot \vec{v}$$

❓ Dimension de k ?

Modèle de Newton

En utilisant le Principe Fondamental de la Dynamique, le phénomène peut être représenté par l'équation :

$$m \cdot \ddot{\vec{x}} = \vec{P} + \vec{f} \tag{2}$$

Ainsi en projetant dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ où $\vec{P} = -m \cdot g \cdot \vec{e}_y$ et $\vec{f} = -k \cdot \|\dot{\vec{x}}\| \cdot \dot{\vec{x}}$, il vient :

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x}(t) &= -k \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \cdot \dot{x}(t) \\ m \cdot \ddot{y}(t) &= -m \cdot g - k \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \cdot \dot{y}(t) \end{aligned}$$

Il s'agit là d'un système d'équations différentielles non-linéaires couplées ne possédant pas de solution analytique dans le cas général !

1. Equations différentielles du mouvement d'un solide dans un fluide
   - Modèle de Stokes pour le frottement
   - Solutions analytiques
   - Modèle de Newton

2. Résolution numérique des équations différentielles
   - Approximation de la valeur de la dérivée
   - Schémas d'Euler explicite et implicite
   - Applications explicite et implicite pour le modèle de Stokes
   - Application explicite pour le modèle de Newton
   - Simulations numériques explicites

1. Equations différentielles du mouvement d'un solide dans un fluide
   - Modèle de Stokes pour le frottement
   - Solutions analytiques
   - Modèle de Newton

2. Résolution numérique des équations différentielles
   - Approximation de la valeur de la dérivée
   - Schémas d'Euler explicite et implicite
   - Applications explicite et implicite pour le modèle de Stokes
   - Application explicite pour le modèle de Newton
   - Simulations numériques explicites

Développement en séries de Taylor

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière au point x_0, il est possible de représenter f au voisinage de x_0 à l'aide du développement en séries de Taylor :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \cdot \frac{d^k f}{dx^k}(x_0)$$

Ou encore dans le cas d'une fonction du temps évaluée à l'instant t pour un incrément de temps $\pm\Delta t$:

$$f(t \pm \Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm\Delta t)^k}{k!} \cdot \frac{d^k f}{dt^k}(t)$$

Soit :

$$f(t \pm \Delta t) = f(t) \pm \Delta t \cdot \frac{df}{dt}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \frac{d^2 f}{dt^2}(t) \pm \frac{\Delta t^3}{6} \cdot \frac{d^3 f}{dt^3}(t) + \dots$$

Développement en séries de Taylor

En particulier pour de "petits" incréments de temps Δt ($|\Delta t|^n << 1, \ n \geq 2$), on peut se contenter de l'approximation :

$$f(t \pm \Delta t) \approx f(t) \pm \Delta t \cdot \frac{df}{dt}(t)$$

Ce qui conduit à l'approximation de la valeur de la dérivée par un taux d'accroissement ($\rightarrow$ interprétation graphique) :

$$\frac{df}{dt}(t) \approx \frac{f(t \pm \Delta t) - f(t)}{\pm \Delta t}$$

Méthodes d'Euler explicite et implicite

- L'objectif des méthodes d'Euler consiste à déduire la valeur de la fonction recherchée en un instant $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ connaissant la valeur de celle-ci à l'instant t_i.
- La résolution de l'équation différentielle ne consiste plus alors à trouver la fonction f pour tout t mais à évaluer les valeurs que celle-ci prend en une succession discrète d'instants $t_i = t_0 + i \cdot \Delta t$ (t_0 instant initial où sont connues les conditions initiales, Δt incrément de temps).
- La distinction entre les approches explicites et implicites repose sur l'instant où l'approximation de la dérivée est considérée : t_i pour le schéma explicite et t_{i+1} pour l'implicite

Méthodes d'Euler explicite et implicite

- Euler explicite en t_i :

$$\frac{df}{dt}(t_i) \approx \frac{f(t_i + \Delta t) - f(t_i)}{\Delta t}$$

- Euler implicite en $t_{i+1} = t_i + \Delta t$:

$$\frac{df}{dt}(t_i + \Delta t) \approx \frac{f(t_i + \Delta t) - f(t_i)}{\Delta t}$$

❓ Démontrer la seconde expression au moyen de la formule générale de la série de Taylor pour $f(t_{i+1} - \Delta t)$.

1. Equations différentielles du mouvement d'un solide dans un fluide
   - Modèle de Stokes pour le frottement
   - Solutions analytiques
   - Modèle de Newton

2. Résolution numérique des équations différentielles
   - Approximation de la valeur de la dérivée
   - Schémas d'Euler explicite et implicite
   - **Applications explicite et implicite pour le modèle de Stokes**
   - Application explicite pour le modèle de Newton
   - Simulations numériques explicites

Applications des méthodes d'Euler explicite et implicite

Les méthodes d'Euler sont ici appliquées aux équations de la dynamique avec prise en compte du frottement selon le modèle de Stokes :

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -k \cdot \dot{x}(t)$$
$$m \cdot \ddot{y}(t) = -m \cdot g - k \cdot \dot{y}(t)$$

Pour simplifier la mise en oeuvre et sans perte de généralité, on s'intéresse au cas particulier d'une chute libre sans vitesse initiale dans la direction y orientée vers le bas. La description du mouvement se résume alors à l'équation différentielle sur la vitesse $v(t)$:

$$m \cdot \dot{v}(t) = m \cdot g - k \cdot v(t)$$

Applications des méthodes d'Euler explicite et implicite

Schéma d'Euler explicite avec la valeur de la dérivée approximée à $t = t_i$:

$$m \cdot \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{\Delta t} = m \cdot g - k \cdot v(t_i)$$

Ce qui conduit au schéma itératif :

$$\begin{aligned} v(t_0) &= 0 \\ v(t_{i+1}) &= \left(1 - \frac{k \cdot \Delta t}{m}\right) \cdot v(t_i) + g \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Applications des méthodes d'Euler explicite et implicite

Schéma d'Euler implicite avec la valeur de la dérivée approximée à $t = t_{i+1}$:

$$m \cdot \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{\Delta t} = m \cdot g - k \cdot v(t_{i+1})$$

Ce qui conduit au schéma itératif :

$$v(t_0) = 0$$
$$v(t_{i+1}) = \frac{1}{\left(1 + \frac{k \cdot \Delta t}{m}\right)} \cdot v(t_i) + \frac{g \cdot \Delta t}{\left(1 + \frac{k \cdot \Delta t}{m}\right)}$$

Applications des méthodes d'Euler explicite et implicite

Les schémas d'Euler explicite et implicite aboutissent tous deux à des formules de récurrence de la forme :

$$v(t_0) = 0$$
$$v(t_{i+1}) = A \cdot v(t_i) + B$$

La stabilité de telles récurrences requiert que $|A| < 1$.

Applications des méthodes d'Euler explicite et implicite

Pour l'exemple précédemment traité, la condition de stabilité aboutit à :

- pour le schéma explicite :

$$\left|1 - \frac{k \cdot \Delta t}{m}\right| \leq 1 \Rightarrow \Delta t \leq \frac{2m}{k}$$

- pour le schéma implicite :

$$\left|\frac{1}{\left(1 + \frac{k \cdot \Delta t}{m}\right)}\right| \leq 1 \Rightarrow \Delta t \geq 0$$

La stabilité du schéma d'Euler implicite est ainsi inconditionnellement garantie tandis que celle du schéma explicite exige de choisir un pas de temps inférieur à une valeur critique liée aux paramètres du problème.

Application explicite pour le modèle de Newton

Nous souhaitons résoudre à l'instant t_i au moyen d'un schéma explicite les équations suivantes (l'usage d'un schéma implicite est également possible mais s'avère ici plus calculatoire) :

$$m \cdot \ddot{x}(t_i) = -k \cdot \sqrt{\dot{x}(t_i)^2 + \dot{y}(t_i)^2} \cdot \dot{x}(t_i)$$
$$m \cdot \ddot{y}(t_i) = -m \cdot g - k \cdot \sqrt{\dot{x}(t_i)^2 + \dot{y}(t_i)^2} \cdot \dot{y}(t_i)$$

A l'aide de l'approximation de la dérivée précédemment proposée, il est possible d'exprimer l'accélération à t_i en fonction de la vitesse et d'un incrément de temps suffisamment petit :

$$\ddot{x}(t_i) \approx \frac{\dot{x}(t_i + \Delta t) - \dot{x}(t_i)}{\Delta t}$$
$$\ddot{y}(t_i) \approx \frac{\dot{y}(t_i + \Delta t) - \dot{y}(t_i)}{\Delta t}$$

Application explicite pour le modèle de Newton

En substituant aux termes d'accélération leurs approximations exprimées en fonction des vitesses, il vient :

$$m \cdot \frac{\dot{x}(t_i + \Delta t) - \dot{x}(t_i)}{\Delta t} = -k \cdot \sqrt{\dot{x}(t_i)^2 + \dot{y}(t_i)^2} \cdot \dot{x}(t_i)$$
$$m \cdot \frac{\dot{y}(t_i + \Delta t) - \dot{y}(t_i)}{\Delta t} = -m \cdot g - k \cdot \sqrt{\dot{x}(t_i)^2 + \dot{y}(t_i)^2} \cdot \dot{y}(t_i)$$

Soit :

$$\dot{x}(t_i + \Delta t) = \dot{x}(t_i) + \frac{\Delta t}{m} \cdot \left(-k \cdot \sqrt{\dot{x}(t_i)^2 + \dot{y}(t_i)^2} \cdot \dot{x}(t_i)\right)$$
$$\dot{y}(t_i + \Delta t) = \dot{y}(t_i) + \frac{\Delta t}{m} \cdot \left(-m \cdot g - k \cdot \sqrt{\dot{x}(t_i)^2 + \dot{y}(t_i)^2} \cdot \dot{y}(t_i)\right)$$

Application explicite pour le modèle de Newton

Ou encore :

$$\dot{x}(t_i + \Delta t) = \dot{x}(t_i) + \frac{\Delta t}{m} \cdot f_1(\dot{x}(t_i), \dot{y}(t_i))$$
$$\dot{y}(t_i + \Delta t) = \dot{y}(t_i) + \frac{\Delta t}{m} \cdot f_2(\dot{x}(t_i), \dot{y}(t_i))$$

Autrement dit, il est possible de déduire la vitesse à $t_i + \Delta t$ connaissant celle-ci à t_i. En pratique, à l'aide des conditions initiales connues à t_0 (par exemple $\dot{x}(t_0) = v_0 \cdot \cos(\alpha),\ \dot{y}(t_0) = v_0 \cdot \sin(\alpha)$), la vitesse à $t_n = t_0 + n \cdot \Delta t$ sera déduite en appliquant par récurrence n fois le schéma d'Euler explicite.

La position sera quant à elle déduite à partir des conditions initiales ($x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0$) et du schéma aux différences finies :

$$x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \Delta t \cdot \dot{x}(t_i)$$
$$y(t_i + \Delta t) = y(t_i) + \Delta t \cdot \dot{y}(t_i)$$

Trajectoire du boulet de canon sans et avec frottement

paramètres (unités SI) :

$m = 10$

$g = 9.81$

$v_0 = 100$

$\alpha = 30^o$

$k_S = 1$

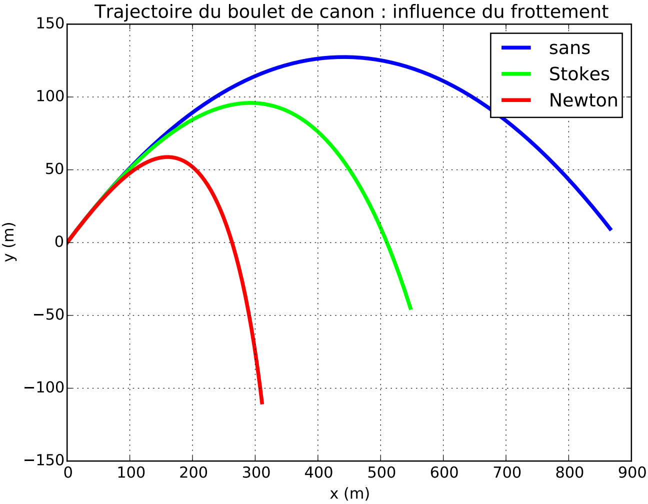
$k_N = 0.05$

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

$\dot{x}_0 = v_0 \cdot cos(\alpha)$

$\dot{y}_0 = v_0 \cdot sin(\alpha)$



Trajectoire du boulet de canon sans et avec frottement

paramètres
(unités SI) :

$m = 10$

$g = 9.81$

$v_0 = 100$

$\alpha = 30^o$

$k_S = 0.1$

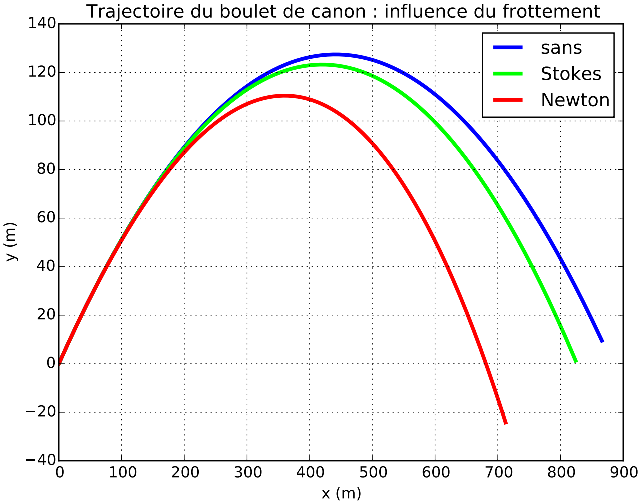
$k_N = 0.005$

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

$\dot{x}_0 = v_0 \cdot cos(\alpha)$

$\dot{y}_0 = v_0 \cdot sin(\alpha)$



Trajectoire du boulet de canon sans et avec frottement

paramètres (unités SI) :

$m = 10$

$g = 9.81$

$v_0 = 100$

$\alpha = 30^o$

$k_S = 0.01$

$k_N = 0.0005$

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

$\dot{x}_0 = v_0 \cdot cos(\alpha)$

$\dot{y}_0 = v_0 \cdot sin(\alpha)$