

Modélisation et Simulation : Modèles pour la physique

Gaëtan Hello

Université d'Evry Val d'Essonne
UFR Sciences et Technologies
gaetan.hello@ufrst.univ-evry.fr

L1 SPI

- 1 Concept de modèle
- 2 Analyse dimensionnelle
- 3 Modélisation par équations différentielles
- 4 Résolution numérique d'équations différentielles (BONUS)

- 1 Concept de modèle
 - Modèle - définition
 - Modèle - fonctions
 - Modèles et modélisations

2 Analyse dimensionnelle

3 Modélisation par équations différentielles

4 Résolution numérique d'équations différentielles (BONUS)

- 1 Concept de modèle
 - **Modèle - définition**
 - Modèle - fonctions
 - Modèles et modélisations
- 2 Analyse dimensionnelle
- 3 Modélisation par équations différentielles
- 4 Résolution numérique d'équations différentielles (BONUS)

Modèle - définition

Un modèle est associé à un phénomène donné.

Un modèle peut être défini comme :

un instrument d'intelligibilité du phénomène étudié constituant une représentation formelle de celui-ci s'appuyant sur une syntaxe symbolique.



FIGURE – <https://www.youtube.com/watch?v=wFYrOr5AiH0>

- 1 Concept de modèle
 - Modèle - définition
 - **Modèle - fonctions**
 - Modèles et modélisations
- 2 Analyse dimensionnelle
- 3 Modélisation par équations différentielles
- 4 Résolution numérique d'équations différentielles (BONUS)

On distingue plusieurs fonctions pour le modèle :

- ▶ fonction de *représentation* : à partir du tout, des éléments pertinents sont extraits et leurs inter-relations explicitées,
- ▶ fonction de *substitution* : l'étude d'un phénomène par nature trop complexe sera réalisée au moyen d'un modèle, la simplification opérée rend alors accessibles des éléments de compréhension,
- ▶ fonction d'*explication* : les paramètres du modèle peuvent être adaptés pour corrélérer des données existantes,
- ▶ fonction de *prédiction* : un modèle aux paramètres identifiés pour une instance donnée du phénomène étudié doit permettre la connaissance de l'évolution du phénomène.

- 1 Concept de modèle
 - Modèle - définition
 - Modèle - fonctions
 - Modèles et modélisations

2 Analyse dimensionnelle

3 Modélisation par équations différentielles

4 Résolution numérique d'équations différentielles (BONUS)

La compréhension effective d'un problème du monde réel passe souvent par sa traduction sous forme de modèles successifs :

- 1 Problème réel (données empiriques)
- 2 Modèle physique (symboles : langage courant, schémas, mathématiques,...)
- 3 Modèle numérique, si besoin (mathématiques appliquées)
- 4 Modèle informatique (algorithmique)

La modélisation constitue l'acte de générer un modèle à partir d'informations pré-existantes.

- 1 Problème du monde réel (données empiriques)
 - mouvement des planètes,
 - comportement d'une voiture lors d'un crash-test,
 - prévisions météorologiques,
 - comportement d'un échangeur thermique,
 - signature radar d'un avion de combat,
 - évolution du PIB d'un état,
 - comportement des joueurs "bot" dans un jeu vidéo,
 - installation de relais de téléphonie mobile,
 - ...

- ② Modèle physique (symboles : langage courant, dessins, mathématiques,...)
 - équations de la mécanique céleste,
 - équations de la mécanique des milieux-continus solides,
 - équations de la mécanique des milieux-continus fluides,
 - équations de la thermique,
 - équations de l'électromagnétisme,
 - outils conceptuels d'économétrie,
 - outils d'intelligence artificielle,
 - équations en optimisation hétérogène multi-critères,
 - (des couplages peuvent exister)
 - ...

- ③ Modèle numérique, si besoin (mathématiques appliquées)
 - méthode des différences-finies (FD - Finite Difference),
 - méthode des éléments-finis (FEM - Finite Element Method),
 - méthode des volumes-finis (FV - Finite Volume),
 - méthode des éléments de frontière (BEM - Boundary Element Method),
 - approches de Monte-Carlo,
 - réseau de neurones (*deep learning...*),
 - logique floue,
 - chaînes de Markov,
 - (des couplages peuvent exister)
 - ...

- ④ Modèle informatique (algorithmique, hardware, software)
 - hardware
 - unité de calcul : processeur multi-coeurs (CPU), GPU, cluster, grid,
 - mémoire partagée/distribuée ...
 - système d'exploitation
 - unix, linux, OS/X, android...
 - windows ...
 - paradigme de programmation
 - procédurale,
 - orientée-objet ...
 - langage de programmation
 - interprété : matlab, python, PHP...
 - compilé : C, C++, fortran...
 - intermédiaire : java, C#, LISP...
 - (des couplages peuvent exister)
 - ...

1 Concept de modèle

2 Analyse dimensionnelle

- Unités SI
- Homogénéité dimensionnelle
- Analyse dimensionnelle

3 Modélisation par équations différentielles

4 Résolution numérique d'équations différentielles (BONUS)

1 Concept de modèle

2 Analyse dimensionnelle

- Unités SI

- Homogénéité dimensionnelle

- Analyse dimensionnelle

3 Modélisation par équations différentielles

4 Résolution numérique d'équations différentielles (BONUS)

Unités SI

Les grandeurs physiques que l'on souhaite étudier sont exprimées dans une unité de mesure. Celle-ci n'étant pas absolue, il est possible de quantifier une grandeur au moyen de différentes unités (ex. : une distance exprimée en kilomètres ou en *miles* - $1 \text{ mi} = 0.62137 \text{ km}$).

Un système international (SI) de mesure a été mis en place. Il existe ainsi 7 grandeurs et unités fondamentales :

- ▶ longueur L en mètre : $[L] = m$,
- ▶ masse M en kilogramme : $[M] = kg$,
- ▶ temps T en seconde : $[T] = s$,
- ▶ courant électrique I en Ampère : $[I] = A$,
- ▶ température thermodynamique Θ en Kelvin : $[\Theta] = K$,
- ▶ quantité de matière N en mole : $[N] = mol$,
- ▶ intensité lumineuse J en candela : $[J] = cd$,

Unités SI

Les grandeurs L , F , M et T sont fondamentalement reliées entre elles.
Exprimer la relation entre m , N , kg , s .

A partir des unités SI fondamentales, exprimer alors les unités de :

- ▶ force,
- ▶ vitesse,
- ▶ accélération,
- ▶ pression,
- ▶ masse volumique,
- ▶ angle,
- ▶ puissance,
- ▶ énergie/travail.

Dans le système anglo-saxon, la pression est mesurée en *psi* (pound per square inch). Celle-ci s'exprime en livre-force (noté *lbf*) par pouce carré (noté *in²*). Sachant qu'une livre-force équivaut à 4.448 Newton et qu'un pouce équivaut à 2.54 centimètres, exprimer une pression de 1 *psi* en Pascal.

1 Concept de modèle

2 Analyse dimensionnelle

- Unités SI
- **Homogénéité dimensionnelle**
- Analyse dimensionnelle

3 Modélisation par équations différentielles

4 Résolution numérique d'équations différentielles (BONUS)

Vérification de l'homogénéité dimensionnelle

Montrer que les relations suivantes sont erronées :

- ▶ Période d'oscillation T d'un pendule ponctuel (masse m , longueur de fil L , accélération de la pesanteur g) : $T = m \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$
- ▶ Energie thermique E^{th} gagnée par un solide de masse m , de capacité thermique massique C_m (unité $J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$) subissant un incrément de température ΔT : $E^{th} = m \cdot C_m \cdot \sqrt{\Delta T}$
- ▶ Energie électrique E^{elec} dissipée par un composant de résistivité R (unité $\Omega = 1 m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$) soumis à un courant d'intensité I pendant une durée t : $E^{elec} = R \cdot I \cdot t$

1 Concept de modèle

2 Analyse dimensionnelle

- Unités SI
- Homogénéité dimensionnelle
- Analyse dimensionnelle

3 Modélisation par équations différentielles

4 Résolution numérique d'équations différentielles (BONUS)

Analyse dimensionnelle - exemple

On considère le problème du mouvement d'un boulet de canon se déplaçant dans l'air. L'approche consistant à ne tenir compte que de l'effet du poids propre apparaît irréaliste au regard de constatations empiriques. Il convient donc alors d'enrichir le modèle initial en prenant désormais en compte l'influence du frottement qu'exerce l'air sur le boulet.

Les concepts et outils de la mécanique du point matériel semblent adaptés à la modélisation de ce phénomène. Quelles hypothèses faut-il réaliser pour justifier l'utilisation de ce cadre théorique ?

Analyse dimensionnelle - exemple

Il est fait l'hypothèse que les paramètres les plus influents sont :

- ▶ le rayon du boulet R ,
- ▶ la vitesse relative entre fluide et solide v ,
- ▶ la masse volumique du fluide ρ ,
- ▶ la viscosité dynamique du fluide μ (en Pa.s).

Nous allons pouvoir déduire l'expression de la force de frottement en fonction de ces paramètres grâce à une simple analyse dimensionnelle en considérant une loi de la forme :

$$f = g(R, v, \rho, \mu)$$

$$f = \lambda \cdot R^\alpha \cdot v^\beta \cdot \rho^\gamma \cdot \mu^\delta, \quad \lambda \text{ sans dimension}$$

Analyse dimensionnelle - exemple

Après calculs, il vient :

$$f = \lambda \cdot R^2 \cdot v^2 \cdot \rho \cdot \left(\frac{\mu}{\rho \cdot R \cdot v} \right)^\delta$$

Dimension de $\frac{\mu}{\rho \cdot R \cdot v}$?

La quantité $\frac{\mu}{\rho \cdot R \cdot v}$ est l'inverse du nombre de Reynolds Re de l'écoulement. Ce nombre caractérise la nature de l'écoulement :

- ▶ $Re \approx 10^5$: turbulent,
- ▶ $Re \approx 10^2$: oscillant,
- ▶ $Re \approx 10$: tourbillonnaire,
- ▶ $Re \ll 1$: laminaire.

Pour ce modèle, il suffit d'identifier les paramètres λ et δ pour quantifier pleinement l'effet du frottement exercé par le fluide sur le solide en mouvement.

Analyse dimensionnelle - Exercices

Par une démarche d'analyse dimensionnelle, déterminer :

- ▶ La période d'oscillation T d'un pendule ponctuel de masse m , de longueur de fil L et soumis à une accélération de la pesanteur g ,
- ▶ L'énergie thermique E^{th} gagnée par un solide de masse m , de capacité thermique massique C_m (unité $J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$) subissant un incrément de température ΔT ,
- ▶ L'énergie électrique E^{elec} dissipée par un composant de résistivité R (unité $\Omega = 1 m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$) soumis à un courant d'intensité I pendant une durée t ,
- ▶ L'altitude maximale atteinte par un solide de masse m lancé verticalement de bas en haut à une vitesse initiale v_0 dans un champ de pesanteur vertical d'intensité g ,
- ▶ La vitesse limite de chute atteinte par un solide de masse m sous l'effet d'une accélération de pesanteur d'intensité g et d'une force de frottement représentée par le modèle de Stokes ($f = -k \cdot v - f$ intensité de la force, k coefficient de frottement, v vitesse relative entre le solide et le fluide).

- 1 Concept de modèle
- 2 Analyse dimensionnelle
- 3 Modélisation par équations différentielles**
 - Mise en équations
 - Solutions
 - Exercices
- 4 Résolution numérique d'équations différentielles (BONUS)

- 1 Concept de modèle
- 2 Analyse dimensionnelle
- 3 Modélisation par équations différentielles**
 - Mise en équations
 - Solutions
 - Exercices
- 4 Résolution numérique d'équations différentielles (BONUS)

Trajectoire du boulet de canon avec frottement

On souhaite connaître la trajectoire d'un boulet de canon se déplaçant dans l'air. L'approche consistant à ne tenir compte que de l'effet du poids apparaît irréaliste au regard de constatations empiriques. Il convient donc alors de prendre en compte l'influence du frottement qu'exerce l'air sur le boulet.

Les concepts et outils de la mécanique du point matériel semblent adaptés à la modélisation de ce phénomène. Quelles hypothèses faut-il réaliser pour justifier l'utilisation de ce cadre théorique ?

Trajectoire du boulet de canon avec frottement

Parmi les différents paramètres influents (forme du projectile, température de l'air ...), il ressort que le plus important est la vitesse relative \vec{v} entre le solide et le fluide.

En première approximation, l'action du fluide tendant à s'opposer à l'avancée du solide d'autant plus intensément que la vitesse relative est importante sera représentée par une force d'expression :

$$\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$$

Trajectoire du boulet de canon avec frottement

L'expression des forces de frottement selon $\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$ constitue le modèle de Stokes (adapté aux "faibles" vitesses). Il existe d'autres modèles pertinents pour différents régime d'écoulement (turbulent \rightarrow modèle de Newton). Le paramètre k agrège les effets de l'ensemble des paramètres influents négligés.

En utilisant le Principe Fondamental de la Dynamique, le phénomène peut être représenté par l'équation :

$$m \cdot \ddot{\vec{x}} = \vec{P} + \vec{f} \quad (1)$$

Ainsi en projetant dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\vec{P} = -m \cdot g \cdot \vec{e}_2$ et $\vec{f} = -k \cdot \dot{\vec{x}}$, il vient :

$$m \cdot \ddot{x}_1(t) = -k \cdot \dot{x}_1(t)$$

$$m \cdot \ddot{x}_2(t) = -m \cdot g - k \cdot \dot{x}_2(t)$$

- 1 Concept de modèle
- 2 Analyse dimensionnelle
- 3 Modélisation par équations différentielles**
 - Mise en équations
 - Solutions**
 - Exercices
- 4 Résolution numérique d'équations différentielles (BONUS)

Solutions analytiques

Equations du mouvement avec prise en compte du poids seul :

$$x_1(t) = \dot{x}_1^0 \cdot t + x_1^0$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + \dot{x}_2^0 \cdot t + x_2^0$$

Equations du mouvement avec prise en compte du frottement selon le modèle de Stokes :

$$x_1(t) = \dot{x}_1^0 \cdot \frac{m}{k} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m} \cdot t\right) \right] + x_1^0$$

$$x_2(t) = \left(\dot{x}_2^0 + \frac{m \cdot g}{k} \right) \cdot \frac{m}{k} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m} \cdot t\right) \right] - \frac{m \cdot g}{k} \cdot t + x_2^0$$

Que se passe-t-il lorsque $t \rightarrow +\infty$ pour $x_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$ avec chacune des approches ?

Solutions analytiques

paramètres
(unités SI) :

$$m = 10$$

$$g = 9.81$$

$$v_0 = 100$$

$$\alpha = 30^\circ$$

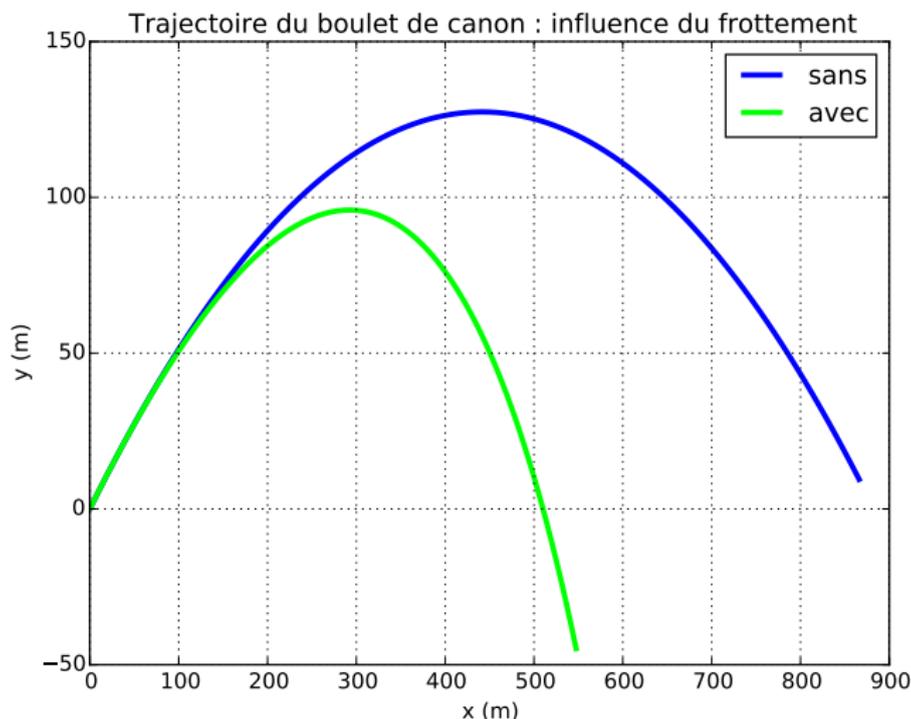
$$k = 1$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\dot{x}_0 = v_0 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\dot{y}_0 = v_0 \cdot \sin(\alpha)$$



- 1 Concept de modèle
- 2 Analyse dimensionnelle
- 3 Modélisation par équations différentielles**
 - Mise en équations
 - Solutions
 - Exercices**
- 4 Résolution numérique d'équations différentielles (BONUS)

- 1 Concept de modèle
- 2 Analyse dimensionnelle
- 3 Modélisation par équations différentielles
- 4 **Résolution numérique d'équations différentielles (BONUS)**
 - Modèle de Newton
 - Développement en séries de Taylor
 - Schéma d'Euler explicite

- 1 Concept de modèle
- 2 Analyse dimensionnelle
- 3 Modélisation par équations différentielles
- 4 Résolution numérique d'équations différentielles (BONUS)**
 - **Modèle de Newton**
 - Développement en séries de Taylor
 - Schéma d'Euler explicite

L'analyse dimensionnelle du phénomène de frottement suggère que son intensité dépend du carré de la vitesse relative. Au lieu du modèle de Stokes ($\propto \vec{v}$), il est donc possible de considérer le modèle suivant, dit modèle de Newton :

$$\vec{f} = -k \cdot \|\vec{v}\| \cdot \vec{v}$$

Dimension de k ?

En utilisant le Principe Fondamental de la Dynamique, le phénomène peut être représenté par l'équation :

$$m \cdot \ddot{\vec{x}} = \vec{P} + \vec{f} \quad (2)$$

Ainsi en projetant dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\vec{P} = -m \cdot g \cdot \vec{e}_2$ et $\vec{f} = -k \cdot \|\dot{\vec{x}}\| \cdot \dot{\vec{x}}$, il vient :

$$m \cdot \ddot{x}_1(t) = -k \cdot \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2} \cdot \dot{x}_1(t)$$

$$m \cdot \ddot{x}_2(t) = -m \cdot g - k \cdot \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2} \cdot \dot{x}_2(t)$$

Il s'agit là d'un système d'équations différentielles non-linéaires couplées !

- 1 Concept de modèle
- 2 Analyse dimensionnelle
- 3 Modélisation par équations différentielles
- 4 **Résolution numérique d'équations différentielles (BONUS)**
 - Modèle de Newton
 - Développement en séries de Taylor
 - Schéma d'Euler explicite

Développement en séries de Taylor

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière au point x_0 , il est possible de représenter f au voisinage de x_0 à l'aide du développement en séries de Taylor :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \cdot \frac{d^k f}{dx^k}(x_0)$$

Ou encore dans le cas d'une fonction du temps :

$$f(t_i + \Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \cdot \frac{d^k f}{dt^k}(t_i)$$

Soit :

$$f(t_i + \Delta t) = f(t_i) + \Delta t \cdot \frac{df}{dt}(t_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \frac{d^2 f}{dt^2}(t_i) + \dots$$

Développement en séries de Taylor

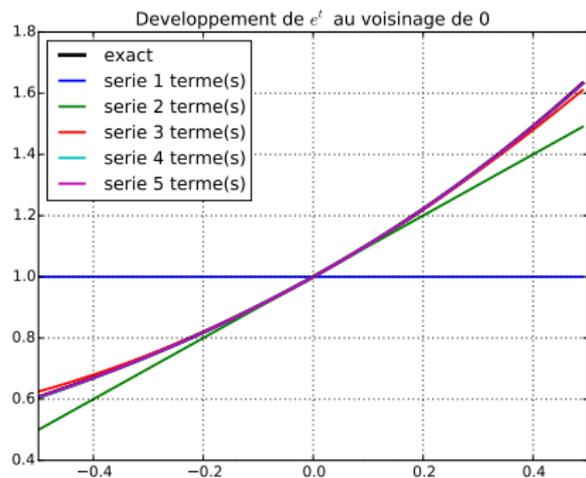
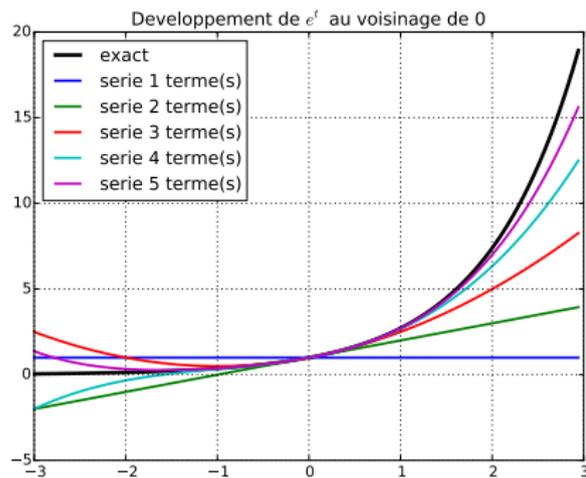
Pour les applications pratiques, seuls les premiers termes de la série sont retenus. En règle générale, plus de termes sont conservés et plus l'approximation est précise.

Par exemple avec e^t au voisinage de 0 ($t_i = 0$, $\Delta t = t$) la série est :

$$\exp(t) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \dots$$

A retrouver en exercice !

Développement en séries de Taylor



Développement en séries de Taylor

Cas général à l'instant t_i :

$$f(t_i + \Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \cdot \frac{d^k f}{dt^k}(t_i)$$

En particulier pour de "petits" incréments de temps Δt ($|\Delta t|^n \ll 1$, $n \geq 2$), on peut se contenter de l'approximation :

$$f(t_i + \Delta t) \approx f(t_i) + \Delta t \cdot \frac{df}{dt}(t_i)$$

Ce qui conduit à l'approximation de la valeur de la dérivée par un taux d'accroissement (\rightarrow interprétation graphique) :

$$\frac{df}{dt}(t_i) \approx \frac{f(t_i + \Delta t) - f(t_i)}{\Delta t}$$

- 1 Concept de modèle
- 2 Analyse dimensionnelle
- 3 Modélisation par équations différentielles
- 4 **Résolution numérique d'équations différentielles (BONUS)**
 - Modèle de Newton
 - Développement en séries de Taylor
 - **Schéma d'Euler explicite**

Schéma d'Euler explicite

Nous souhaitons résoudre :

$$m \cdot \ddot{x}_1(t_i) = -k \cdot \sqrt{\dot{x}_1(t_i)^2 + \dot{x}_2(t_i)^2} \cdot \dot{x}_1(t_i)$$

$$m \cdot \ddot{x}_2(t_i) = -m \cdot g - k \cdot \sqrt{\dot{x}_1(t_i)^2 + \dot{x}_2(t_i)^2} \cdot \dot{x}_2(t_i)$$

A l'aide de l'approximation de la dérivée précédemment proposée, il est possible d'exprimer l'accélération en fonction de la vitesse et d'un incrément de temps suffisamment petit :

$$\ddot{x}_j(t_i) \approx \frac{\dot{x}_j(t_i + \Delta t) - \dot{x}_j(t_i)}{\Delta t}$$

Schéma d'Euler explicite

En substituant :

$$m \cdot \frac{\dot{x}_1(t_i + \Delta t) - \dot{x}_1(t_i)}{\Delta t} = -k \cdot \sqrt{\dot{x}_1(t_i)^2 + \dot{x}_2(t_i)^2} \cdot \dot{x}_1(t_i)$$
$$m \cdot \frac{\dot{x}_2(t_i + \Delta t) - \dot{x}_2(t_i)}{\Delta t} = -m \cdot g - k \cdot \sqrt{\dot{x}_1(t_i)^2 + \dot{x}_2(t_i)^2} \cdot \dot{x}_2(t_i)$$

Soit :

$$\dot{x}_1(t_i + \Delta t) = \dot{x}_1(t_i) + \frac{\Delta t}{m} \cdot \left(-k \cdot \sqrt{\dot{x}_1(t_i)^2 + \dot{x}_2(t_i)^2} \cdot \dot{x}_1(t_i) \right)$$
$$\dot{x}_2(t_i + \Delta t) = \dot{x}_2(t_i) + \frac{\Delta t}{m} \cdot \left(-m \cdot g - k \cdot \sqrt{\dot{x}_1(t_i)^2 + \dot{x}_2(t_i)^2} \cdot \dot{x}_2(t_i) \right)$$

Schéma d'Euler explicite

Ou encore :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t_i + \Delta t) &= \dot{x}_1(t_i) + \frac{\Delta t}{m} \cdot f_1(\dot{x}_1(t_i), \dot{x}_2(t_i)) \\ \dot{x}_2(t_i + \Delta t) &= \dot{x}_2(t_i) + \frac{\Delta t}{m} \cdot f_2(\dot{x}_1(t_i), \dot{x}_2(t_i))\end{aligned}$$

Autrement dit, il est possible de déduire la vitesse à $t_i + \Delta t$ connaissant celle-ci à t_i . En pratique, à l'aide des conditions initiales connues à t_0 (par exemple $\dot{x}_1(t_0) = v_0 \cdot \cos(\alpha)$, $\dot{x}_2(t_0) = v_0 \cdot \sin(\alpha)$), la vitesse à $t_n = t_0 + n \cdot \Delta t$ sera déduite en appliquant par récurrence n fois le schéma d'Euler explicite.

La position sera quant à elle déduite à partir des conditions initiales ($x_1(t_0) = x_1^0$, $x_2(t_0) = x_2^0$) et du schéma aux différences finies :

$$x_j(t_i + \Delta t) = x_j(t_i) + \Delta t \cdot \dot{x}_j(t_i)$$

Trajectoire du boulet de canon sans et avec frottement

paramètres
(unités SI) :

$$m = 10$$

$$g = 9.81$$

$$v_0 = 100$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$k_S = 1$$

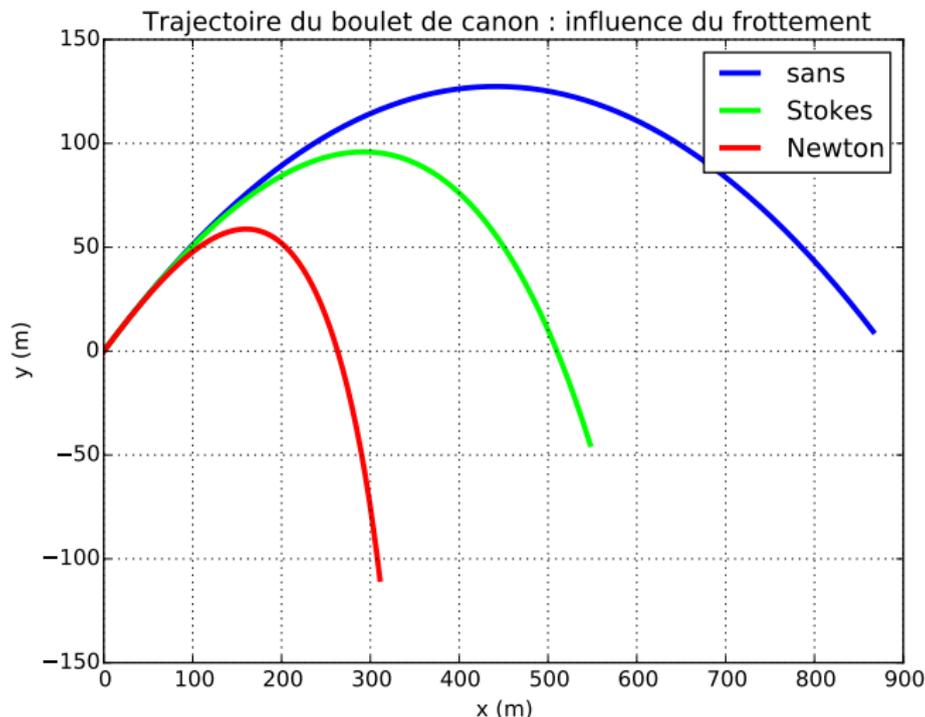
$$k_N = 0.05$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\dot{x}_0 = v_0 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\dot{y}_0 = v_0 \cdot \sin(\alpha)$$



Trajectoire du boulet de canon sans et avec frottement

paramètres
(unités SI) :

$$m = 10$$

$$g = 9.81$$

$$v_0 = 100$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$k_S = 0.1$$

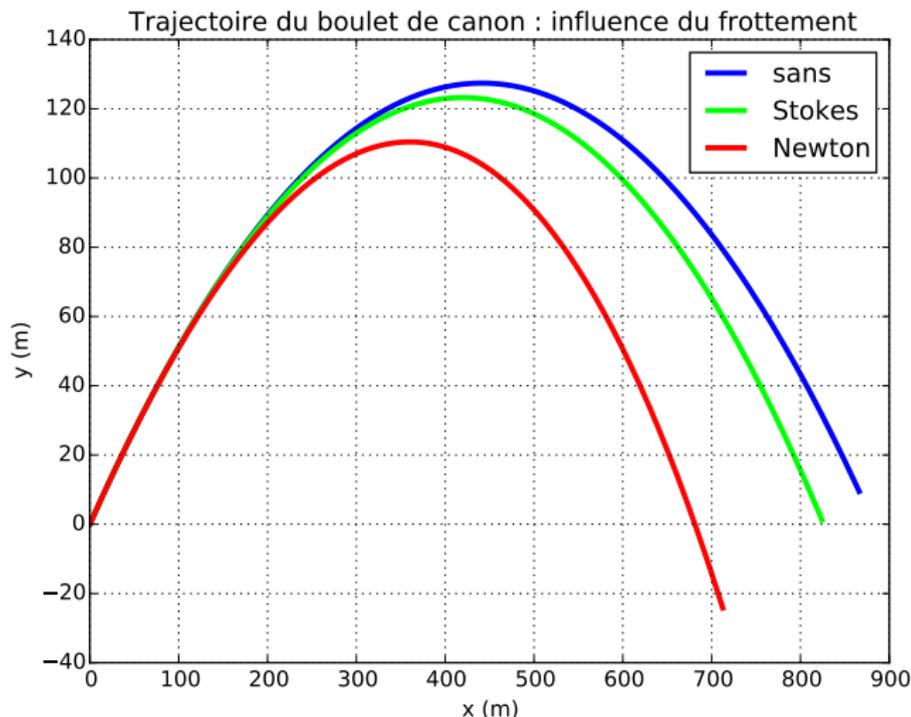
$$k_N = 0.005$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\dot{x}_0 = v_0 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\dot{y}_0 = v_0 \cdot \sin(\alpha)$$



Trajectoire du boulet de canon sans et avec frottement

paramètres
(unités SI) :

$$m = 10$$

$$g = 9.81$$

$$v_0 = 100$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$k_S = 0.01$$

$$k_N = 0.0005$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\dot{x}_0 = v_0 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\dot{y}_0 = v_0 \cdot \sin(\alpha)$$

