Modélisation et Simulation
Cours 5 : Exploitation de l'Aléatoire

Gaëtan Hello

Université d'Evry Val d'Essonne
UFR Sciences et Technologies
gaetan.hello@ufrst.univ-evry.fr

2017-2018

1. Méthodes de Monte-Carlo
   - Principes
   - Exemples

Méthodes de Monte-Carlo : principes

- Les méthodes de Monte-Carlo sont des stratégies numériques permettant d'approcher les solutions de problèmes en exploitant la génération répétée de variables aléatoires,
- Elles requièrent généralement l'usage d'un programme informatique introduisant l'aléa : un générateur de nombre (pseudo)aléatoire.

Exemple : calcul de π

Exemple 1 : calcul de π (langage Python)

```
import math      #librairie de fct mathematiques
import random    #librairie fct aleatoires

#=== parametres numeriques ==================================
nMC=1000 #nombre de tirages de Monte Carlo

#=== algo de Monte Carlo ====================================
compteur=0
for i in range(nMC):
    x=random.random() #nombre aleatoire entre 0 et 1
    y=random.random()
    if (x-0.5)**2+(y-0.5)**2-0.5**2<0: #dans le cercle
        compteur+=1
piMC=4.*float(compteur)/float(nMC)
print 'piReference= '+str(math.pi)
print 'piMonteCarlo='+str(piMC)
```

Exemple 2 : lancers de dés

Considérant n dés à f faces (donc à valeurs entières entre 1 et f) , on cherche à estimer quelle est la probabilité p d'obtenir une somme des valeurs égale à S.

Si le cas général apparaît complexe à résoudre, pour un cas particulier où $n = 2$ dés, $f = 6$ faces et $S = 8$, une technique de dénombrement simple peut être employée.

Exemple 2 : lancers de dés

Pour le cas particulier où $n = 2$ dés, $f = 6$ faces et $S = 8$, la technique de dénombrement donne $p = 5/36 \approx 0.138889$.

Si nous n'étions pas parvenus analytiquement à cette solution, l'approche de Monte-Carlo suivante donnerait une estimation de p :

```
import random
nMC=1000000
compteur=0
for i in range(nMC):
    d1=random.randint(1,6)
    d2=random.randint(1,6)
    if((d1+d2)==8):
        compteur+=1
proba=compteur/nMC
print(proba)
```

Exemple 2 : lancers de dés

La solution du cas général peut être approximée par l'approche de Monte-Carlo suivante :

```
import random
n=2#nb de des
f=6#nb de faces
s=8#somme des valeurs
nMC=1000000
compteur=0
for i in range(nMC):
    somme=0
    for j in range(n):
        somme+=random.randint(1,f)
    if(somme==s):
        compteur+=1
proba=compteur/nMC
print(proba)
```

Exemple 3 : paradoxe de l'anniversaire

Etant donné un groupe de n personnes, quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre elles aient la même date d'anniversaire (année à 365 jours) ?

On note p cette probabilité et $\bar{p} = 1 - p$ la probabilité que l'évènement ne se produise pas.

Exemple 3 : paradoxe de l'anniversaire

Calcul analytique :

$$\bar{p} = \frac{365 \cdot (365-1) \cdot (365-2) \cdot \ \ldots \ \cdot (365-n+1)}{365^n}$$
$$\bar{p} = \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \ \ldots \ \cdot \left(1 - \frac{n-1}{365}\right)$$

D'où :

$$p = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \ \ldots \ \cdot \left(1 - \frac{n-1}{365}\right)$$

Pour $n = 23$, $p = 50.73\%$.

Exemple 3 : paradoxe de l'anniversaire (script Python)

```
#=== import des bibliotheques ==========================
import numpy   #librairie pour les tableaux
import random  #librairie fct aleatoires

#=== parametres physiques ==============================
n=23 #nombre de personnes

#=== parametres numeriques =============================
nMC=10000 #nombre de tirages de Monte-Carlo

#=== solution analytique ===============================
produit=1.
for i in range(1,n):
    produit=produit*(1.-i/365.)
pExact=1.-produit
```

Exemple 3 : paradoxe de l'anniversaire (script Python)

```
#=== solution de Monte Carlo ==========================
compteur=0
dates=numpy.zeros(n)
for i in range(nMC):
    test=False
    for j in range(n):
        dates[j]=random.randint(1,365)
        for k in range(0,j):
            if dates[j]==dates[k]:
                test=True
    if test==True:
        compteur+=1
pMC=float(compteur)/float(nMC)
print 'Pour n='+str(n)
print 'pExact='+str(pExact)
print 'pMC='+str(pMC)
```

2 Chaînes de Markov

- Exemple 1

Chaînes de Markov : exemple 1

On souhaite modéliser l'évolution de l'état des étudiants durant le cours afin d'ajuster la pratique pédagogique pour s'assurer qu'un maximum d'étudiants soit attentif.

On fait l'hypothèse que chaque étudiant à un instant donné ne peut être que dans l'un des ces 3 états :

- état 1 : écoutant,
- état 2 : bavardant,
- état 3 : dormant.

On cherchera à connaître l'état $e_i^j \in \{1, 2, 3\}$ de chaque étudiant i à l'issue de la j^{iem} période de temps afin de déduire des propriétés collectives.

Chaînes de Markov : exemple 1

A l'instant de mesure j, l'état de la classe composée de n étudiants est caractérisé par un vecteur d'état $\mathbf{x}^j \in \{1, 2, 3\}^n$ définit par :

$$\mathbf{x}^j = \begin{bmatrix} e_1^j \\ e_2^j \\ \vdots \\ e_n^j \end{bmatrix} \tag{1}$$

On fait l'hypothèse que l'état initial de la classe est connu, par exemple que l'ensemble des étudiants bavardent en entrant dans la salle, cela se traduit :

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Chaînes de Markov : exemple 1

Il s'agit alors de pouvoir déduire l'état $\mathbf{x}^1$ à partir de $\mathbf{x}^0$ et plus généralement $\mathbf{x}^{j+1}$ en fonction de $\mathbf{x}^j$.

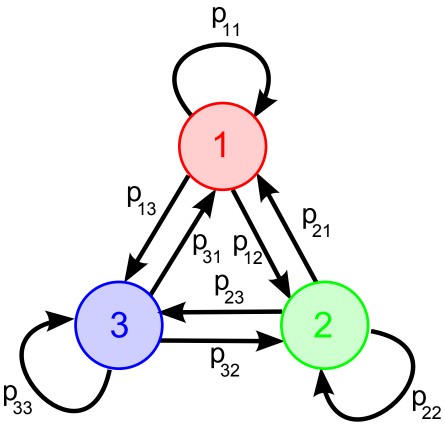
Pour cela, il est fait l'hypothèse que le changement d'état de chaque étudiant peut être représenté par des propabilités. On définit alors les probabilités $p_{ij} \in [0,1], \ (i,j) \in \{1,2,3\}^2$ qui quantifient les "chances" de transition de l'état i vers l'état j.

Par exemple ici :

- p_{21} : proba de passer de l'état 2 vers l'état 1,
- p_{22} : proba de passer de l'état 2 vers l'état 2 (rester identique),
- p_{23} : proba de passer de l'état 2 vers l'état 3,

Chaînes de Markov : exemple 1

Ces transitions peuvent être représentées graphiquement selon :



les probabilités doivent satisfaire la condition :

$\sum_{j=1}^{3} p_{ij} = 1, \ \forall i \in \{1, 2, 3\}.$

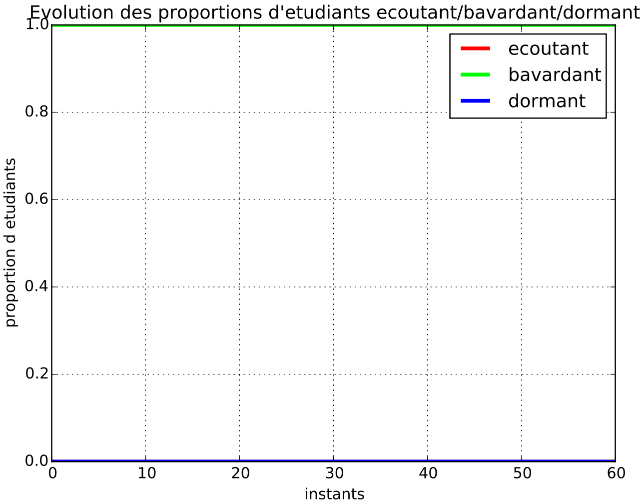
pour $n = 113$ étudiants

probabilités :

$p_{11} = 1.$
$p_{12} = 0.$
$p_{13} = 0.$

$p_{21} = 0.$
$p_{22} = 1.$
$p_{23} = 0.$

$p_{31} = 0.$
$p_{32} = 0.$
$p_{33} = 1.$



Chaînes de Markov : exemple 1 avec aléas

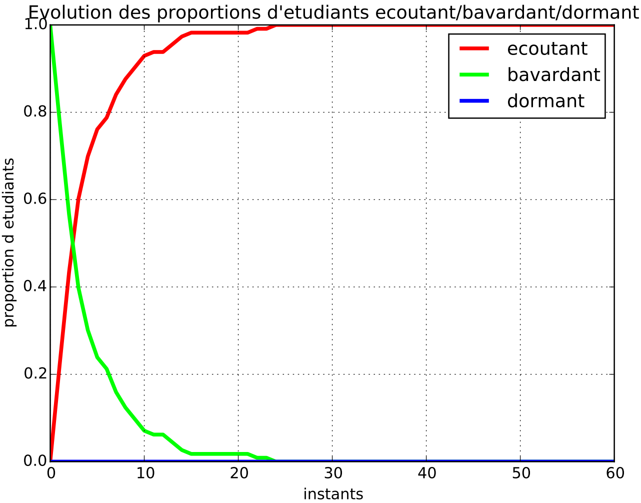
pour $n = 113$ étudiants

probabilités :

$$p_{11} = 1.$$
$$p_{12} = 0.$$
$$p_{13} = 0.$$

$$p_{21} = 0.2$$
$$p_{22} = 0.8$$
$$p_{23} = 0.$$

$$p_{31} = 0.$$
$$p_{32} = 0.$$
$$p_{33} = 1.$$



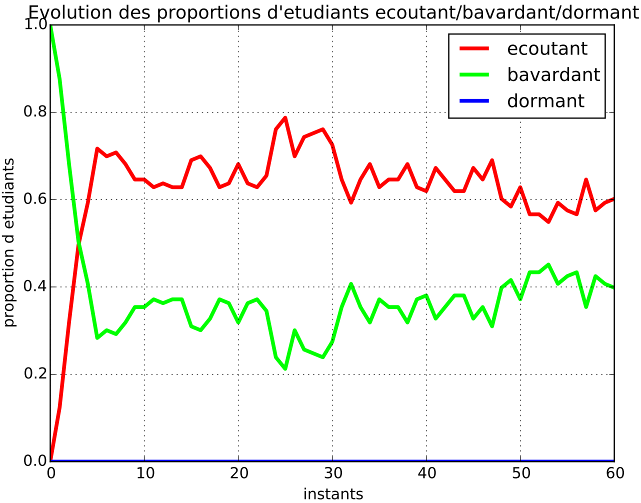
pour $n = 113$ étudiants

probabilités :

$$p_{11} = 0.9$$
$$p_{12} = 0.1$$
$$p_{13} = 0.$$

$$p_{21} = 0.2$$
$$p_{22} = 0.8$$
$$p_{23} = 0.$$

$$p_{31} = 0.$$
$$p_{32} = 0.$$
$$p_{33} = 1.$$



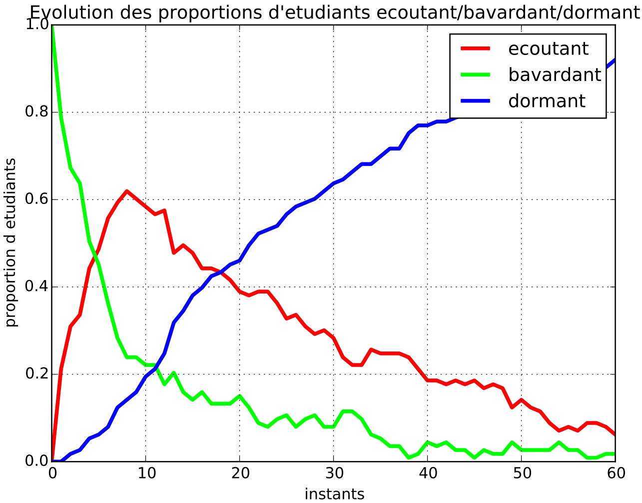
pour $n = 113$ étudiants

probabilités :

$$p_{11} = 0.9$$
$$p_{12} = 0.05$$
$$p_{13} = 0.05$$

$$p_{21} = 0.2$$
$$p_{22} = 0.8$$
$$p_{23} = 0.$$

$$p_{31} = 0.$$
$$p_{32} = 0.$$
$$p_{33} = 1.$$



Chaînes de Markov : exemple 1 avec aléas

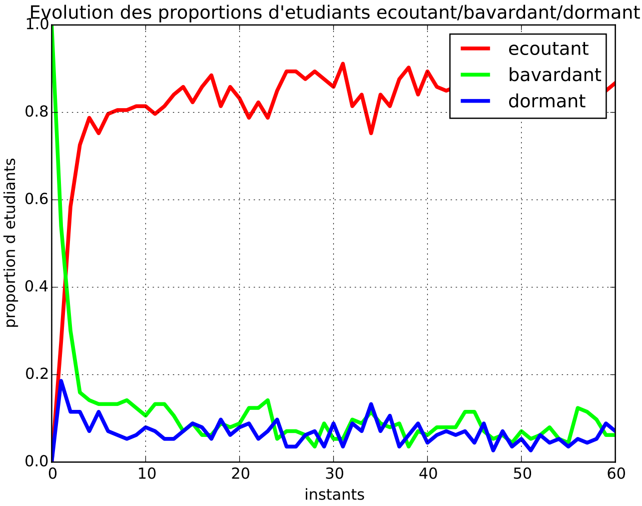
pour $n = 113$ étudiants

probabilités :

$$p_{11} = 0.9$$
$$p_{12} = 0.05$$
$$p_{13} = 0.05$$

$$p_{21} = 0.3$$
$$p_{22} = 0.5$$
$$p_{23} = 0.2$$

$$p_{31} = 0.8$$
$$p_{32} = 0.05$$
$$p_{33} = 0.15$$



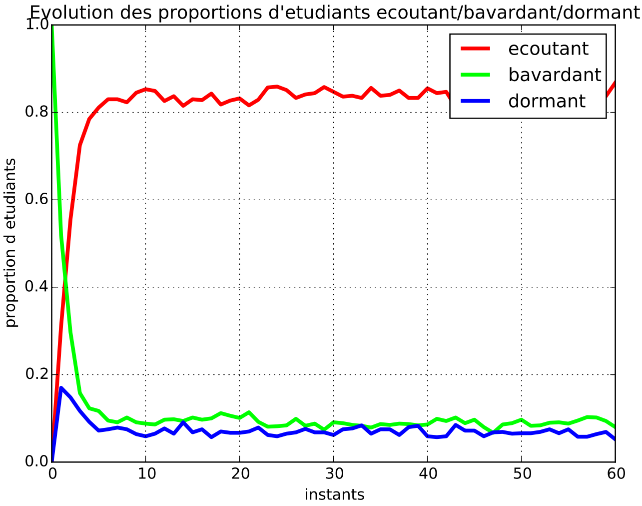
pour $n = 1000$ étudiants

probabilités :

$$p_{11} = 0.9$$
$$p_{12} = 0.05$$
$$p_{13} = 0.05$$

$$p_{21} = 0.3$$
$$p_{22} = 0.5$$
$$p_{23} = 0.2$$

$$p_{31} = 0.8$$
$$p_{32} = 0.05$$
$$p_{33} = 0.15$$



Chaînes de Markov : exemple 1 avec aléas

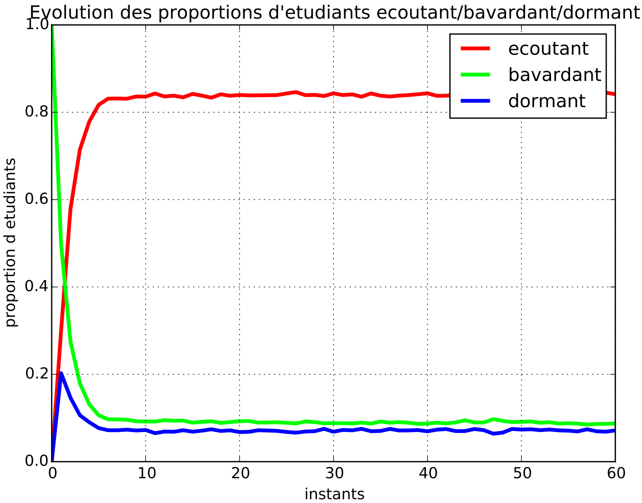
pour $n = 10000$ étudiants

probabilités :

$$p_{11} = 0.9$$
$$p_{12} = 0.05$$
$$p_{13} = 0.05$$

$$p_{21} = 0.3$$
$$p_{22} = 0.5$$
$$p_{23} = 0.2$$

$$p_{31} = 0.8$$
$$p_{32} = 0.05$$
$$p_{33} = 0.15$$



Chaînes de Markov : exemple 1 avec itérations matricielles

Si l'on s'intéresse désormais au seul comportement global de la classe et non plus à celui de tel ou tel individu, l'état de la classe composée de n étudiants peut être caractérisé à l'instant de mesure j par un vecteur d'état $\mathbf{n}^j \in [0, n]^3$ définit par :

$$\mathbf{n}^j = \begin{bmatrix} n_1^j \\ n_2^j \\ n_3^j \end{bmatrix} \tag{3}$$

où n_i^j représente le nombre d'étudiant dans l'état $i \in \{1, 2, 3\}$.

Chaînes de Markov : exemple 1 avec itérations matricielles

Les transitions entre différents instants peuvent alors être calculées au moyen du schéma :

$$\mathbf{n}^{j+1} = P \cdot \mathbf{n}^j \tag{4}$$

Avec la matrice de probabilités P telle que :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \tag{5}$$

A partir de l'état initial $\mathbf{n}^0$, on obtient donc :

$$\mathbf{n}^k = P^k \cdot \mathbf{n}^0 \tag{6}$$

La puissance k^{iem} de la matrice P peut être calculée en exploitant la notion de valeurs et vecteurs propres (calcul de $\mathbf{n}^\infty$) ...

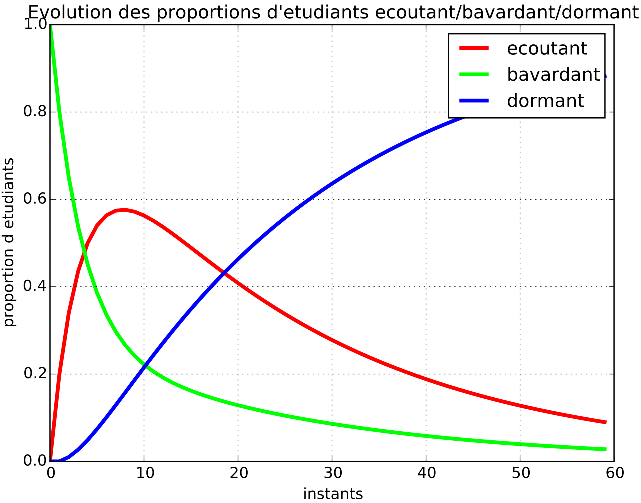
pour $n = 113$ étudiants

probabilités :

$$p_{11} = 0.9$$
$$p_{12} = 0.05$$
$$p_{13} = 0.05$$

$$p_{21} = 0.2$$
$$p_{22} = 0.8$$
$$p_{23} = 0.0$$

$$p_{31} = 0.0$$
$$p_{32} = 0.0$$
$$p_{33} = 1.$$



pour $n = 113$ étudiants

probabilités :

$$p_{11} = 0.9$$
$$p_{12} = 0.05$$
$$p_{13} = 0.05$$

$$p_{21} = 0.3$$
$$p_{22} = 0.5$$
$$p_{23} = 0.2$$

$$p_{31} = 0.8$$
$$p_{32} = 0.05$$
$$p_{33} = 0.15$$