Modélisation et Simulation
Cours 3 : Optimisation Continue

Gaëtan Hello

Université d'Evry Val d'Essonne
UFR Sciences et Technologies
gaetan.hello@ufrst.univ-evry.fr

2015-2016

1. Principes élémentaires de l'optimisation continue

2. Applications à des fonctions-objectif de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

3. Algorithmes de résolution de $f(x) = 0, \; f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. Principes élémentaires de l'optimisation continue
   - Vocabulaire
   - Ecriture formelle du problème d'optimisation
   - Exemples
   - Condition nécessaire d'optimalité

2. Applications à des fonctions-objectif de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

3. Algorithmes de résolution de $f(x) = 0, \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Vocabulaire

De nombreux problèmes en sciences physiques et de l'ingénieur peuvent s'envisager au travers de la recherche d'un état assurant la maximisation ou la minimisation d'une quantité d'intérêt appropriée. Les vocabulaire suivant est alors employé :

- *fonction-objectif* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:
  il s'agit de la quantité d'intérêt scalaire pertinente pour le problème envisagé (ex : masse, rigidité, potentiels, ...),
- *paramètres d'optimisation* $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$:
  ce sont les n variables scalaires influençant f (ex : coordonnées, épaisseurs, modules de matériaux, ...),
- *domaine de conception* D :
  espace auquel appartiennent les paramètres d'optimisation,
- *minimisation/maximisation* :
  l'optimisation consiste en pratique à déterminer une valeur de $\underline{x}$ conduisant à minimiser/maximiser f sur D.

Ecriture formelle du problème d'optimisation

Sans perte de généralité, on considérera désormais que le problème d'optimisation consiste en un problème de minimisation (maximiser f revenant à minimiser $-f$).

Le problème de minimisation revient alors à déterminer $\underline{x}^*$ tel que :

$$\underline{x}^* = \underset{\underline{x} \in D}{\operatorname{argmin}} \; f(\underline{x})$$

($\underline{x}^*$ est la valeur de l'argument $\underline{x} \in D$ conduisant à minimiser $f(\underline{x})$)

Exemples

- parmis les triangles isocèles de périmètre p fixé, lequel à la plus grande aire ?
- parmis les triangles de périmètre p fixé, lequel à la plus grande aire ?
- une ferme est située au centre d'un champ de blé circulaire (rayon R). La production surfacique du champ est constante et vaut a tandis que le coût pour ramener cette production à la ferme évolue linéairement en $b \cdot r$ (plus la récolte est loin de la ferme et plus il est onéreux de l'y ramener). Quel est le rayon optimal R^* du champ ?

1. Principes élémentaires de l'optimisation continue
   - Vocabulaire
   - Ecriture formelle du problème d'optimisation
   - Exemples
   - Condition nécessaire d'optimalité

2. Applications à des fonctions-objectif de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

3. Algorithmes de résolution de $f(x) = 0, \; f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Condition nécessaire d'optimalité

Pour une fonction-objectif f différentiable et convexe sur D, la résolution du problème de minimisation :

$$\underline{x}^* = \underset{\underline{x} \in D}{\operatorname{argmin}} \; f(\underline{x})$$

revient à simplement satisfaire :

$$\underline{\mathrm{grad}}_f(\underline{x}^*) = \underline{0}$$

avec $\underline{\mathrm{grad}}_f(\underline{x}^*)$ le vecteur gradient associé à f évalué en $\underline{x}^*$ qui a pour expression en coordonnées cartésiennes :

$$\underline{\mathrm{grad}}_f(\underline{x}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^*) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}^*) \end{bmatrix}$$

Condition nécessaire d'optimalité en 1D

La satisfaction de la CNO pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit simplement :

$$\frac{df}{dx}(x^*) = 0$$

Si f est convexe au voisinage de x^* alors x^* est un minimum local. Si l'information sur la convexité n'est pas disponible, pour garantir que x^* est un minimum local il suffit de montrer que :

- $\frac{d^2f}{dx^2}(x^*) > 0$ (pente croissante en x^* - valeurs propres de la matrice hessienne positives pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)
- ou que $\exists\ \varepsilon_0 > 0,\ \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0,\ f(x^* \pm \varepsilon) > f(x^*)$ (positivité de la matrice hessienne au voisinage de x^* pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$).

1. Principes élémentaires de l'optimisation continue

2. Applications à des fonctions-objectif de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   - Exemple 1
   - Exemple 2
   - Exemple 3

3. Algorithmes de résolution de $f(x) = 0, \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Exemple 1

Un ressort sans masse de raideur k et de longueur à vide L_0 est accroché au plafond. Un poids de masse m est ensuite accroché à l'extrémité libre du ressort. Déterminer la position d'équilibre du système soumis au champ de pesanteur terrestre d'accélération g (pour simplifier les calculs, on pourra considérer le vecteur de base $\vec{e}_x$ selon la verticale et du haut vers le bas).

Exemple 1

Solution par application du principe fondamental de la statique ou du principe de minimisation de l'énergie potentielle totale (énergie potentielle de pesanteur de la masse + énergie de déformation élastique du ressort) :

$$x^* = L_0 + \frac{m \cdot g}{k}$$

Remarque : une procédure d'analyse dimensionnelle permettrait également de dériver ce résultat.

Exemple 2

Deux ressorts sans masse de raideurs k_1, k_2 et de longueur à vide L_{01}, L_{02} sont reliés à l'une de leurs extrémités respectives. Les deux extrémités restantes sont ensuite accrochées de sorte que la distance entre celles-ci soit L. On fait l'hypothèse que les deux ressorts restent parfaitement alignés. Déterminer la position d'équilibre du système.

Exemple 2

Solution par application du principe fondamental de la statique ou du principe de minimisation de l'énergie potentielle totale (énergies de déformation élastique des deux ressorts) :

$$x^* = \frac{k_1 \cdot L_{01} + k_2 \cdot (L - L_{02})}{k_1 + k_2}$$

Exemple 3

Une tige sans masse indéformable de longueur L est liée à un bâti au moyen d'un ressort de torsion de raideur C et d'angle à vide θ_0. A sa seconde extrémité est accroché un poids de masse m. Ce système est soumis à l'accélération de la pesanteur terrestre d'intensité g. En supposant que le mouvement a lieu dans le plan $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ (par exemple avec $\vec{e}_x$ vertical de haut en bas), exprimer la position d'équilibre du système.

Exemple 3

Solution par application du principe fondamental de la statique (somme des moments nuls) ou du principe de minimisation de l'énergie potentielle totale (énergie potentielle de pesanteur de la masse + énergie de déformation élastique du ressort) :

$$C \cdot (\theta^* - \theta_0) + m \cdot g \cdot L \cdot \sin(\theta^*) = 0$$

Il s'agit désormais de pouvoir résoudre une équation non-linéaire de la forme $f(\theta) = 0$ (où f est la dérivée de la fonction-objectif) ! ! !

1. Principes élémentaires de l'optimisation continue

2. Applications à des fonctions-objectif de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

3. Algorithmes de résolution de $f(x) = 0, \; f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   - Méthode de la dichotomie
   - Méthode de Newton-Raphson

Méthode de la dichotomie : principe

La méthode de la dichotomie a pour objectif de déterminer numériquement la solution d'un problème de la forme $f(x) = 0, \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Il suffit pour cela de connaître un intervalle initial $[a, b]$ où la fonction f change une unique fois de signe (choix par exemple guidé par l'espace de conception du problème d'optimisation sous-jacent).

La dichotomie va alors consister à remplacer sur chaque itération l'une des extrémités de l'intervalle par le milieu de celui-ci. Le choix de l'extrémité à remplacer doit conduire à un nouvel intervalle deux fois plus court où f change de signe.

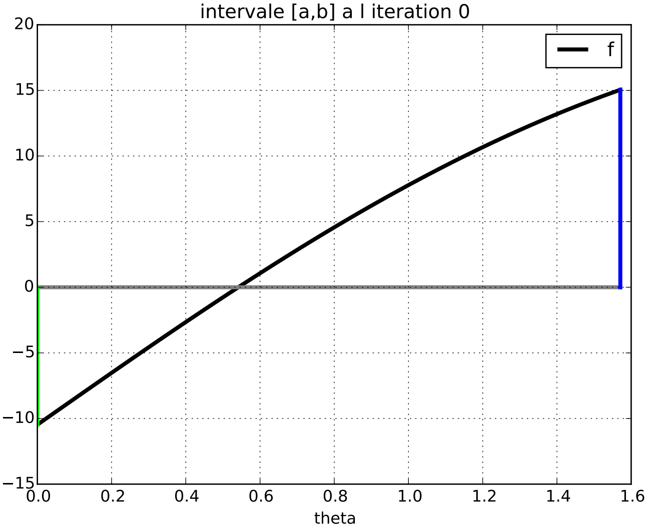
Méthode de la dichotomie : algorithme

```
input : a, b, epsilon, fonction f(x)
fa=f(a), fb=f(b)
while b-a>epsilon
    c=(a+b)/2.
    fc=f(c)
    if fa*fc<=0 #changement de signe sur [a;c]
        b=c
        fb=fc
    else #changement de signe sur [c;b]
        a=c
        fa=fc
    endif
endwhile
```

Méthode de la dichotomie $f(\theta) = C \cdot (\theta - \theta_0) + m \cdot g \cdot L \cdot \sin(\theta)$

paramètres (unités SI) :

$$m = 1$$
$$g = 9.81$$
$$L = 1$$
$$C = 10$$
$$\theta_0 = \frac{\pi}{3}$$



Méthode de la dichotomie $f(\theta) = C \cdot (\theta - \theta_0) + m \cdot g \cdot L \cdot \sin(\theta)$

paramètres (unités SI) :

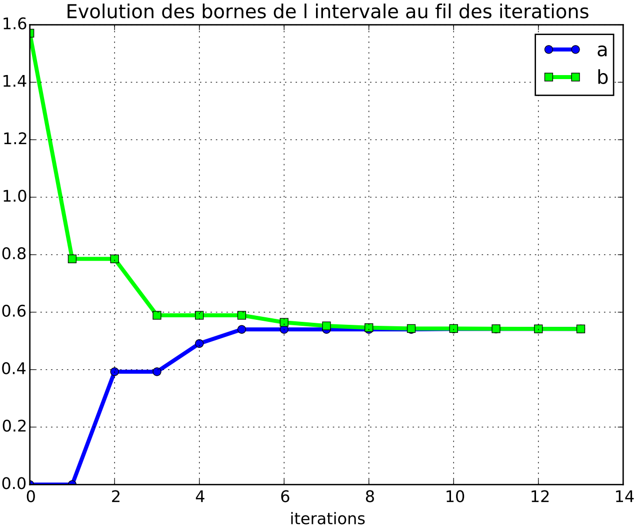
$m = 1$

$g = 9.81$

$L = 1$

$C = 10$

$\theta_0 = \dfrac{\pi}{3}$



Méthode de la dichotomie $f(\theta) = C \cdot (\theta - \theta_0) + m \cdot g \cdot L \cdot \sin(\theta)$

paramètres (unités SI) :

$m = 1$

$g = 9.81$

$L = 1$

$C = 10$

$\theta_0 = \frac{\pi}{3}$

iter	a^i	b^i
0	0.0000000000000000e+00	1.5707963267948966e+00
1	0.0000000000000000e+00	7.8539816339744828e-01
2	3.9269908169872414e-01	7.8539816339744828e-01
3	3.9269908169872414e-01	5.8904862254808621e-01
4	4.9087385212340517e-01	5.8904862254808621e-01
5	5.3996123733574564e-01	5.8904862254808621e-01
6	5.3996123733574564e-01	5.6450492994191593e-01
7	5.3996123733574564e-01	5.5223308363883079e-01
8	5.3996123733574564e-01	5.4609716048728822e-01
9	5.3996123733574564e-01	5.4302919891151693e-01
10	5.4149521812363128e-01	5.4302919891151693e-01
11	5.4149521812363128e-01	5.4226220851757410e-01
12	5.4149521812363128e-01	5.4187871332060269e-01
13	5.4149521812363128e-01	5.4168696572211694e-01
14	5.4149521812363128e-01	5.4159109192287413e-01

1. Principes élémentaires de l'optimisation continue

2. Applications à des fonctions-objectif de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

3. Algorithmes de résolution de $f(x) = 0, \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   - Méthode de la dichotomie
   - Méthode de Newton-Raphson

Méthode de Newton-Raphson : principe

La méthode de Newton-Raphson a pour objectif de déterminer numériquement la solution d'un problème de la forme $f(x) = 0, \; f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On se donne pour cela une estimation initiale raisonable x^0 de la solution x^* (guidé par des considérations physiques par exemple). La fonction f doit être dérivable dans l'intervalle de recherche.

La méthode de Newton-Raphson va alors consister à déduire x^{k+1} de x^k en approximant localement f par l'équation de sa courbe tangente en x^k et à déterminer en quelle valeur celle-ci s'annule.

Méthode de Newton-Raphson : algorithme

Equation de la courbe tangente en x^k :

$$y(x) = f'(x^k) \cdot (x - x^k) + f(x^k) \qquad (1)$$

Cette droite coupe l'axe des x en x^{k+1} d'où :

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x^k) \cdot (x^{k+1} - x^k) + f(x^k) \\ x^{k+1} &= x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \end{aligned} \qquad (2)$$

```
input : x, epsilon, fonction f(x), fonction f'(x)
while abs(f(x))>epsilon
    x=x-f(x)/f'(x)
endwhile
```

Méthode de Newton-Raphson $f(\theta) = C \cdot (\theta - \theta_0) + m \cdot g \cdot L \cdot \sin(\theta)$

paramètres (unités SI) :

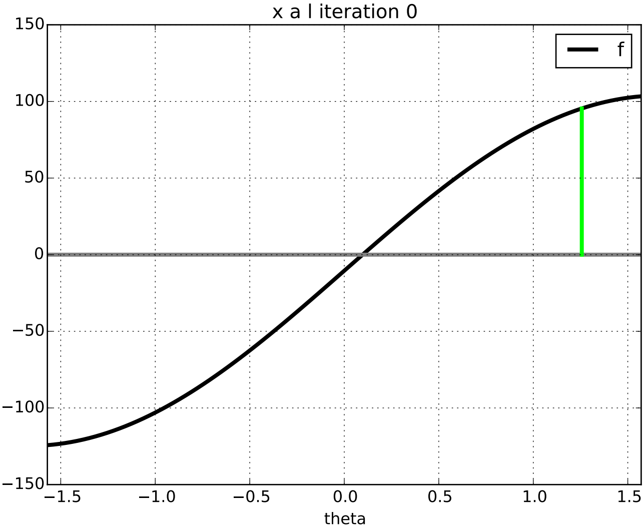
$m = 10$

$g = 9.81$

$L = 1$

$C = 10$

$\theta_0 = \frac{\pi}{3}$



Méthode de Newton-Raphson $f(\theta) = C \cdot (\theta - \theta_0) + m \cdot g \cdot L \cdot \sin(\theta)$

paramètres (unités SI) :

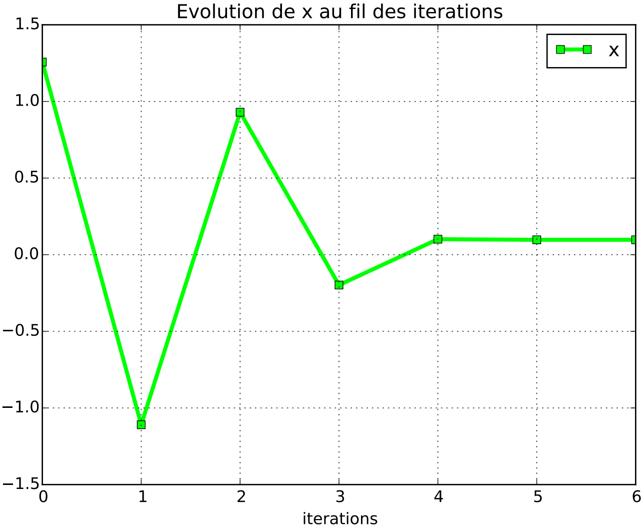
$m = 10$

$g = 9.81$

$L = 1$

$C = 10$

$\theta_0 = \frac{\pi}{3}$



Méthode de Newton-Raphson $f(\theta) = C \cdot (\theta - \theta_0) + m \cdot g \cdot L \cdot \sin(\theta)$

paramètres (unités SI) :

$m = 10$

$g = 9.81$

$L = 1$

$C = 10$

$\theta_0 = \frac{\pi}{3}$

iter	x^i	$f(x^i)$
0	1.256637061435917246e+00	9.539303935094775966e+01
1	-1.109580564076867670e+00	-1.094175181512762691e+02
2	9.295789368553331045e-01	7.743802878037534754e+01
3	-1.979302253514296783e-01	-3.174169999901330641e+01
4	1.009990057659568841e-01	4.291806769509456387e-01
5	9.701034058132514126e-02	-7.764916048458303521e-05
6	9.701106196799123838e-02	-2.470912363605748396e-12
7	9.701106196801419224e-02	-1.776356839400250465e-15