

Modélisation et Simulation

Cours 2 : Modélisation pour la physique

Gaëtan Hello

Université d'Evry Val d'Essonne
UFR Sciences et Technologies
gaetan.hello@ufrst.univ-evry.fr

2015-2016

- 1 Modélisation des forces de frottement fluide
- 2 Résolution des équations différentielles
- 3 Analyse dimensionnelle
- 4 Résolution numérique par différences-finies

- 1 Modélisation des forces de frottement fluide
- 2 Résolution des équations différentielles
- 3 Analyse dimensionnelle
- 4 Résolution numérique par différences-finies

Trajectoire du boulet de canon avec frottement

On souhaite connaître la trajectoire d'un boulet de canon se déplaçant dans l'air. L'approche consistant à ne tenir compte que de l'effet du poids apparaît irréaliste au regard de constatations empiriques. Il convient donc alors de prendre en compte l'influence du frottement qu'exerce l'air sur le boulet.

Les concepts et outils de la mécanique du point matériel semblent adaptés à la modélisation de ce phénomène. Quelles hypothèses faut-il réaliser pour justifier l'utilisation de ce cadre théorique ?

Trajectoire du boulet de canon avec frottement

Parmi les différents paramètres influents (forme du projectile, température de l'air ...), il ressort que le plus important est la vitesse relative \vec{v} entre le solide et le fluide.

En première approximation, l'action du fluide tendant à s'opposer à l'avancée du solide d'autant plus intensément que la vitesse relative est importante sera représentée par une force d'expression :

$$\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$$

Trajectoire du boulet de canon avec frottement

L'expression des forces de frottement selon $\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$ constitue le modèle de Stokes (adapté aux "faibles" vitesses). Il existe d'autres modèles pertinents pour différents régime d'écoulement (turbulent \rightarrow modèle de Newton). Le paramètre k agrège les effets de l'ensemble des paramètres influents négligés.

En utilisant le Principe Fondamental de la Dynamique, le phénomène peut être représenté par l'équation :

$$m \cdot \ddot{\vec{x}} = \vec{P} + \vec{f} \quad (1)$$

Ainsi en projetant dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\vec{P} = -m \cdot g \cdot \vec{e}_2$ et $\vec{f} = -k \cdot \dot{\vec{x}}$, il vient :

$$m \cdot \ddot{x}_1(t) = -k \cdot \dot{x}_1(t)$$

$$m \cdot \ddot{x}_2(t) = -m \cdot g - k \cdot \dot{x}_2(t)$$

- 1 Modélisation des forces de frottement fluide
- 2 Résolution des équations différentielles**
- 3 Analyse dimensionnelle
- 4 Résolution numérique par différences-finies

Trajectoire du boulet de canon sans et avec frottement

Equations du mouvement avec prise en compte du poids seul :

$$x_1(t) = \dot{x}_1^0 \cdot t + x_1^0$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + \dot{x}_2^0 \cdot t + x_2^0$$

Equations du mouvement avec prise en compte du frottement selon le modèle de Stokes :

$$x_1(t) = \dot{x}_1^0 \cdot \frac{m}{k} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m} \cdot t\right) \right] + x_1^0$$

$$x_2(t) = \left(\dot{x}_2^0 + \frac{m \cdot g}{k} \right) \cdot \frac{m}{k} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m} \cdot t\right) \right] - \frac{m \cdot g}{k} \cdot t + x_2^0$$

Que se passe t-il lorsque $t \rightarrow +\infty$ pour chacune des approches ?

Trajectoire du boulet de canon sans et avec frottement

paramètres
(unités SI) :

$$m = 10$$

$$g = 9.81$$

$$v_0 = 100$$

$$\alpha = 30^\circ$$

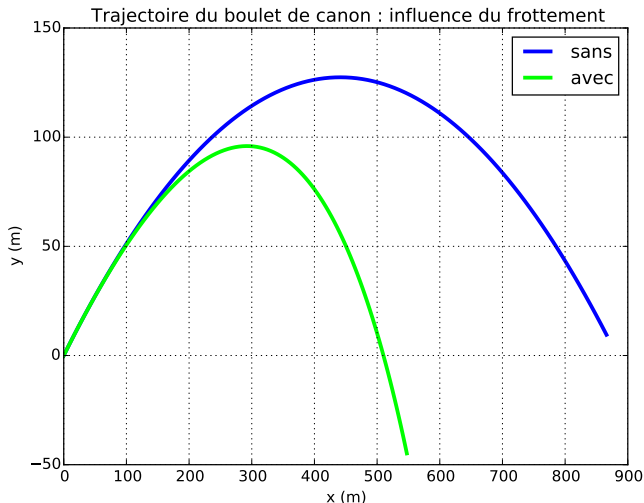
$$k = 1$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\dot{x}_0 = v_0 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\dot{y}_0 = v_0 \cdot \sin(\alpha)$$



- 1 Modélisation des forces de frottement fluide
- 2 Résolution des équations différentielles
- 3 Analyse dimensionnelle**
 - Unités SI
 - Analyse dimensionnelle du frottement fluide
 - Exercices
- 4 Résolution numérique par différences-finies

- 1 Modélisation des forces de frottement fluide
- 2 Résolution des équations différentielles
- 3 Analyse dimensionnelle**
 - Unités SI
 - Analyse dimensionnelle du frottement fluide
 - Exercices
- 4 Résolution numérique par différences-finies

Les grandeurs physiques que l'on souhaite étudier sont exprimées dans une unité de mesure. Celle-ci n'étant pas absolue, il est possible de quantifier une grandeur au moyen de différentes unités (ex. : une distance exprimée en kilomètres ou en *miles* - $1 \text{ mi} = 0.62137 \text{ km}$).

Un système international (SI) de mesure a été mis en place. En particulier, concernant des grandeurs mécaniques :

- ▶ longueur L en mètre : $[L] = m$,
- ▶ force F en Newton : $[F] = N$,
- ▶ masse M en kilogramme : $[M] = \text{kg}$,
- ▶ temps T en seconde : $[T] = s$,

Unités SI

A partir des unités SI précédentes, exprimer les unités de :

- ▶ vitesse,
- ▶ accélération,
- ▶ pression,
- ▶ masse volumique,
- ▶ angle,
- ▶ énergie/travail

Les grandeurs L , F , M et T sont fondamentalement reliées entre elles. Exprimer la relation entre m , N , kg , s .

Dans le système anglo-saxon, la pression est mesurée en *psi* (pound per square inch). Celle-ci s'exprime en livre-force (noté *lbf*) par pouce carré (noté in^2). Sachant qu'une livre-force équivaut à 4.448 Newton et qu'un pouce équivaut à 2.54 centimètres, exprimer une pression de 1 *psi* en Pascal.

- 1 Modélisation des forces de frottement fluide
- 2 Résolution des équations différentielles
- 3 Analyse dimensionnelle**
 - Unités SI
 - **Analyse dimensionnelle du frottement fluide**
 - Exercices
- 4 Résolution numérique par différences-finies

Dans le cas d'un boulet de canon sphérique, le modèle de Stokes $\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$ dépend d'un paramètre k (dimension ?). Celui-ci agrège les effets des multiples paramètres autres que la vitesse.

On souhaite désormais définir un modèle plus précis qui tiendra compte explicitement d'autres paramètres influents. Dresser une liste de paramètres influents.

Analyse dimensionnelle

Il est fait l'hypothèse que les paramètres les plus influents sont :

- ▶ le rayon du boulet R ,
- ▶ la vitesse relative entre fluide et solide v ,
- ▶ la masse volumique du fluide ρ ,
- ▶ la viscosité dynamique du fluide μ (en Pa.s).

Nous allons pouvoir déduire l'expression de la force de frottement en fonction de ces paramètres grâce à une simple analyse dimensionnelle en considérant une loi de la forme :

$$f = g(R, v, \rho, \mu)$$

$$f = \lambda \cdot R^\alpha \cdot v^\beta \cdot \rho^\gamma \cdot \mu^\delta, \quad \lambda \text{ sans dimension}$$

Analyse dimensionnelle

Après calculs, il vient :

$$f = \lambda \cdot R^2 \cdot v^2 \cdot \rho \cdot \left(\frac{\mu}{\rho \cdot R \cdot v} \right)^\delta$$

Dimension de $\frac{\mu}{\rho \cdot R \cdot v}$?

La quantité $\frac{\mu}{\rho \cdot R \cdot v}$ est l'inverse du nombre de Reynolds Re de l'écoulement. Ce nombre caractérise la nature de l'écoulement :

- ▶ $Re \approx 10^5$: turbulent,
- ▶ $Re \approx 10^2$: oscillant,
- ▶ $Re \approx 10$: tourbillonnaire,
- ▶ $Re \ll 1$: laminaire.

Pour ce modèle, il suffit d'identifier les paramètres λ et δ pour quantifier pleinement l'effet du frottement exercé par le fluide sur le solide en mouvement.

- 1 Modélisation des forces de frottement fluide
- 2 Résolution des équations différentielles
- 3 Analyse dimensionnelle**
 - Unités SI
 - Analyse dimensionnelle du frottement fluide
 - Exercices
- 4 Résolution numérique par différences-finies

Un projectile est lancé verticalement de bas en haut. Moyennant l'hypothèse que seul le poids propre s'exerce sur le solide, déterminer par analyse dimensionnelle l'altitude maximale atteinte.

Un projectile chute verticalement. Il subit les effets de son poids propre et du frottement de Stokes. Déterminer par analyse dimensionnelle la vitesse limite du mouvement.

- 1 Modélisation des forces de frottement fluide
- 2 Résolution des équations différentielles
- 3 Analyse dimensionnelle
- 4 Résolution numérique par différences-finies
 - Modèle de Newton
 - Développement en séries de Taylor
 - Schéma d'Euler explicite

- 1 Modélisation des forces de frottement fluide
- 2 Résolution des équations différentielles
- 3 Analyse dimensionnelle
- 4 Résolution numérique par différences-finies**
 - **Modèle de Newton**
 - Développement en séries de Taylor
 - Schéma d'Euler explicite

L'analyse dimensionnelle du phénomène de frottement suggère que son intensité dépend du carré de la vitesse relative. Au lieu du modèle de Stokes ($\propto \vec{v}$), il est donc possible de considérer le modèle suivant, dit modèle de Newton :

$$\vec{f} = -k \cdot \|\vec{v}\| \cdot \vec{v}$$

Dimension de k ?

En utilisant le Principe Fondamental de la Dynamique, le phénomène peut être représenté par l'équation :

$$m \cdot \ddot{\vec{x}} = \vec{P} + \vec{f} \quad (2)$$

Ainsi en projetant dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\vec{P} = -m \cdot g \cdot \vec{e}_2$ et $\vec{f} = -k \cdot \|\dot{\vec{x}}\| \cdot \dot{\vec{x}}$, il vient :

$$m \cdot \ddot{x}_1(t) = -k \cdot \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2} \cdot \dot{x}_1(t)$$

$$m \cdot \ddot{x}_2(t) = -m \cdot g - k \cdot \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2} \cdot \dot{x}_2(t)$$

Il s'agit là d'un système d'équations différentielles non-linéaires couplées !

- 1 Modélisation des forces de frottement fluide
- 2 Résolution des équations différentielles
- 3 Analyse dimensionnelle
- 4 Résolution numérique par différences-finies**
 - Modèle de Newton
 - Développement en séries de Taylor**
 - Schéma d'Euler explicite

Développement en séries de Taylor

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière au point x_0 , il est possible de représenter f au voisinage de x_0 à l'aide du développement en séries de Taylor :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \cdot \frac{d^k f}{dx^k}(x_0)$$

Ou encore dans le cas d'une fonction du temps :

$$f(t_i + \Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \cdot \frac{d^k f}{dt^k}(t_i)$$

Soit :

$$f(t_i + \Delta t) = f(t_i) + \Delta t \cdot \frac{df}{dt}(t_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \frac{d^2 f}{dt^2}(t_i) + \dots$$

Développement en séries de Taylor

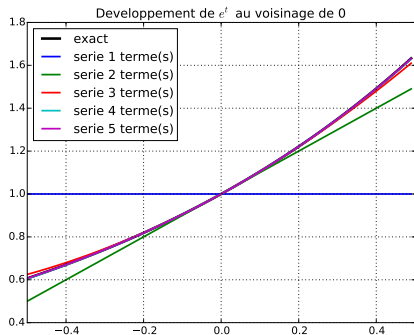
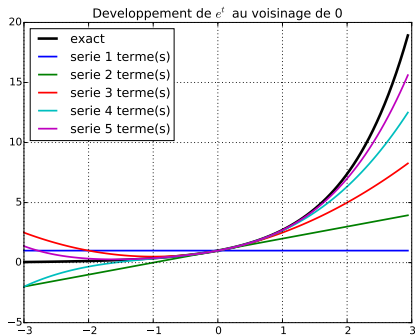
Pour les applications pratiques, seuls les premiers termes de la série sont retenus. En règle générale, plus de termes sont conservés et plus l'approximation est précise.

Par exemple avec e^t au voisinage de 0 ($t_i = 0$, $\Delta t = t$) la série est :

$$\exp(t) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \dots$$

A retrouver en exercice !

Développement en séries de Taylor



Développement en séries de Taylor

Cas général à l'instant t_i :

$$f(t_i + \Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \cdot \frac{d^k f}{dt^k}(t_i)$$

En particulier pour de "petits" incréments de temps Δt ($|\Delta t|^n \ll 1$, $n \geq 2$), on peut se contenter de l'approximation :

$$f(t_i + \Delta t) \approx f(t_i) + \Delta t \cdot \frac{df}{dt}(t_i)$$

Ce qui conduit à l'approximation de la valeur de la dérivée par un taux d'accroissement (\rightarrow interprétation graphique) :

$$\frac{df}{dt}(t_i) \approx \frac{f(t_i + \Delta t) - f(t_i)}{\Delta t}$$

- 1 Modélisation des forces de frottement fluide
- 2 Résolution des équations différentielles
- 3 Analyse dimensionnelle
- 4 **Résolution numérique par différences-finies**
 - Modèle de Newton
 - Développement en séries de Taylor
 - **Schéma d'Euler explicite**

Schéma d'Euler explicite

Nous souhaitons résoudre :

$$m \cdot \ddot{x}_1(t_i) = -k \cdot \sqrt{\dot{x}_1(t_i)^2 + \dot{x}_2(t_i)^2} \cdot \dot{x}_1(t_i)$$

$$m \cdot \ddot{x}_2(t_i) = -m \cdot g - k \cdot \sqrt{\dot{x}_1(t_i)^2 + \dot{x}_2(t_i)^2} \cdot \dot{x}_2(t_i)$$

A l'aide de l'approximation de la dérivée précédemment proposée, il est possible d'exprimer l'accélération en fonction de la vitesse et d'un incrément de temps suffisamment petit :

$$\ddot{x}_j(t_i) \approx \frac{\dot{x}_j(t_i + \Delta t) - \dot{x}_j(t_i)}{\Delta t}$$

Schéma d'Euler explicite

En substituant :

$$m \cdot \frac{\dot{x}_1(t_i + \Delta t) - \dot{x}_1(t_i)}{\Delta t} = -k \cdot \sqrt{\dot{x}_1(t_i)^2 + \dot{x}_2(t_i)^2} \cdot \dot{x}_1(t_i)$$

$$m \cdot \frac{\dot{x}_2(t_i + \Delta t) - \dot{x}_2(t_i)}{\Delta t} = -m \cdot g - k \cdot \sqrt{\dot{x}_1(t_i)^2 + \dot{x}_2(t_i)^2} \cdot \dot{x}_2(t_i)$$

Soit :

$$\dot{x}_1(t_i + \Delta t) = \dot{x}_1(t_i) + \frac{\Delta t}{m} \cdot \left(-k \cdot \sqrt{\dot{x}_1(t_i)^2 + \dot{x}_2(t_i)^2} \cdot \dot{x}_1(t_i) \right)$$

$$\dot{x}_2(t_i + \Delta t) = \dot{x}_2(t_i) + \frac{\Delta t}{m} \cdot \left(-m \cdot g - k \cdot \sqrt{\dot{x}_1(t_i)^2 + \dot{x}_2(t_i)^2} \cdot \dot{x}_2(t_i) \right)$$

Schéma d'Euler explicite

Ou encore :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t_i + \Delta t) &= \dot{x}_1(t_i) + \frac{\Delta t}{m} \cdot f_1(\dot{x}_1(t_i), \dot{x}_2(t_i)) \\ \dot{x}_2(t_i + \Delta t) &= \dot{x}_2(t_i) + \frac{\Delta t}{m} \cdot f_2(\dot{x}_1(t_i), \dot{x}_2(t_i))\end{aligned}$$

Autrement dit, il est possible de déduire la vitesse à $t_i + \Delta t$ connaissant celle-ci à t_i . En pratique, à l'aide des conditions initiales connues à t_0 (par exemple $\dot{x}_1(t_0) = v_0 \cdot \cos(\alpha)$, $\dot{x}_2(t_0) = v_0 \cdot \sin(\alpha)$), la vitesse à $t_n = t_0 + n \cdot \Delta t$ sera déduite en appliquant par récurrence n fois le schéma d'Euler explicite.

La position sera quant à elle déduite à partir des conditions initiales ($x_1(t_0) = x_1^0$, $x_2(t_0) = x_2^0$) et du schéma aux différences finies :

$$x_j(t_i + \Delta t) = x_j(t_i) + \Delta t \cdot \dot{x}_j(t_i)$$

Trajectoire du boulet de canon sans et avec frottement

paramètres
(unités SI) :

$$m = 10$$

$$g = 9.81$$

$$v_0 = 100$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$k_S = 1$$

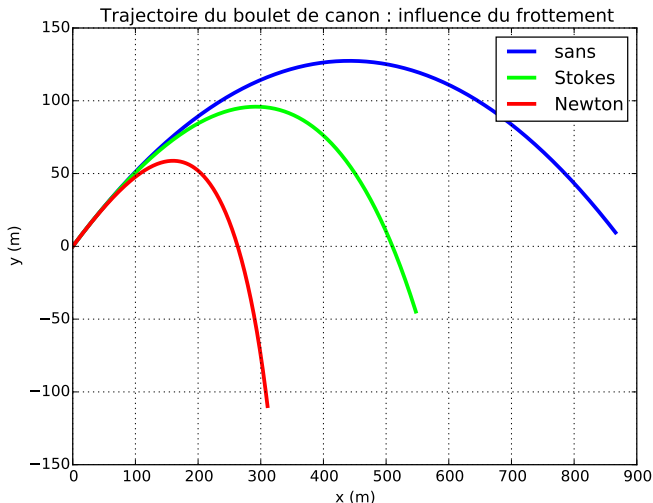
$$k_N = 0.05$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\dot{x}_0 = v_0 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\dot{y}_0 = v_0 \cdot \sin(\alpha)$$



Trajectoire du boulet de canon sans et avec frottement

paramètres
(unités SI) :

$$m = 10$$

$$g = 9.81$$

$$v_0 = 100$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$k_S = 0.1$$

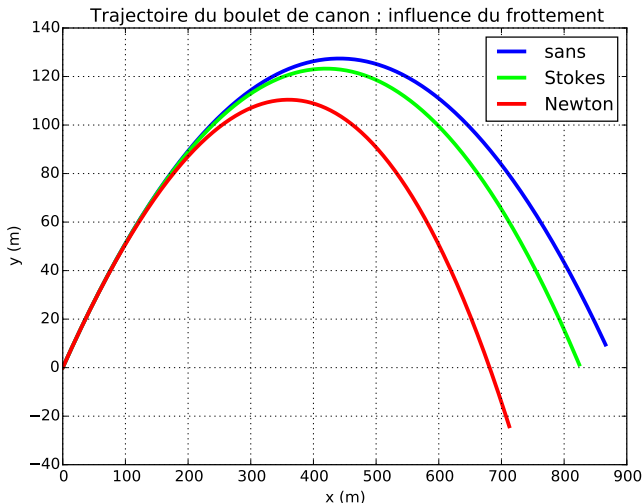
$$k_N = 0.005$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\dot{x}_0 = v_0 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\dot{y}_0 = v_0 \cdot \sin(\alpha)$$



Trajectoire du boulet de canon sans et avec frottement

paramètres
(unités SI) :

$$m = 10$$

$$g = 9.81$$

$$v_0 = 100$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$k_S = 0.01$$

$$k_N = 0.0005$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\dot{x}_0 = v_0 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\dot{y}_0 = v_0 \cdot \sin(\alpha)$$

