

Analyse Modale

Gaëtan Hello

Université d'Evry Val d'Essonne
UFR S&T - Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry
gaetan.hello@ufrst.univ-evry.fr

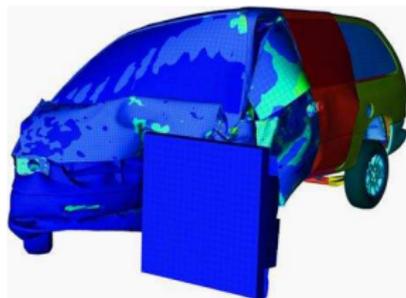
Semestre d'automne 2012

- 1 Introduction
- 2 Systèmes discrets
- 3 Formulation du problème FEM pour la mécanique
- 4 Aspects logiciels

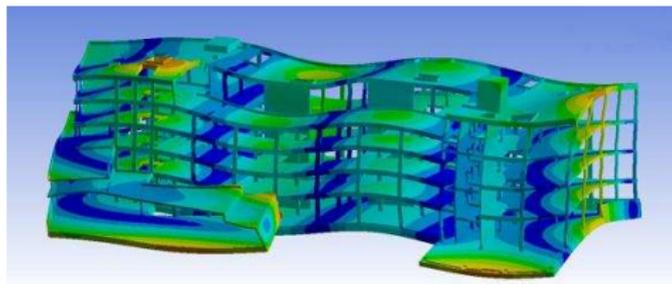
1 Introduction

Introduction

La gestion de la dépendance temporelle des équations de la mécanique peut s'envisager selon deux approches : l'une temporelle (par ex. dynamique explicite) l'autre fréquentielle (par ex. analyse modale).



crash \rightarrow t



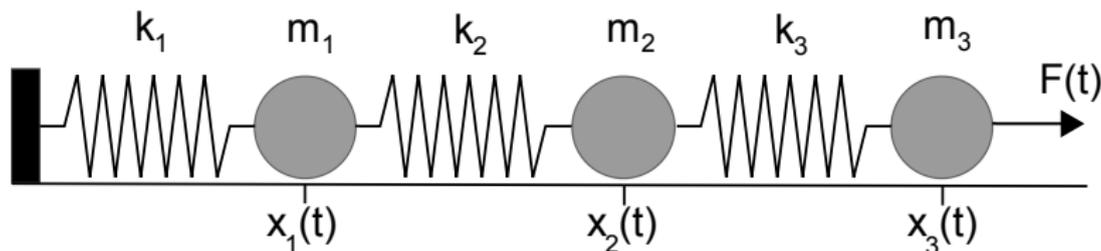
réponse sismique \rightarrow f

Le choix de l'une ou l'autre des approches est guidée par le type d'application considérée.

- ## 2 Systèmes discrets
- Système masses+ressorts
 - Mise en équation
 - Problème aux valeurs propres
 - Décomposition modale
 - Solution système masses+ressorts

Mise en équation

On considère le problème de l'équilibre dynamique d'un système mécanique discret constitué de masses ponctuelles reliées par des ressorts (la formulation du problème modal pour une discrétisation FEM serait parfaitement analogue).



Le système subit un déplacement imposé nul à son extrémité gauche et une force $F(t)$ à son extrémité droite.

Il s'agit de déterminer les expressions des fonctions $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$.

Mise en équation

On se place sous dans le cadre de la mécanique du point matériel.

Une manière de formaliser le problème consiste à appliquer la condition d'équilibre dynamique pour chacune des masses :

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{x}_1(t) &= -k_1 x_1(t) + k_2 [x_2(t) - x_1(t)] \\m_2 \ddot{x}_2(t) &= -k_2 [x_2(t) - x_1(t)] + k_3 [x_3(t) - x_2(t)] \\m_3 \ddot{x}_3(t) &= -k_3 [x_3(t) - x_2(t)] + F(t)\end{aligned}\quad (1)$$

Le problème prend ainsi la forme d'un système d'équations différentielles couplées.

Mise en équation

En écrivant le système précédent sous forme algébrique il vient :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 - k_2 & k_2 & 0 \\ k_2 & -k_2 - k_3 & k_3 \\ 0 & k_3 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Ou encore :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Le système précédent est de la forme :

$$[M] [\ddot{x}(t)] + [K] [x(t)] = [f(t)] \quad (4)$$

Avec :

- ▶ $[M]$: la matrice masse associée au système (matrice symétrique à diagonale dominante),
- ▶ $[\ddot{x}(t)]$ le vecteur accélération,
- ▶ $[K]$: la matrice de rigidité associée au système (matrice symétrique),
- ▶ $[x(t)]$ le vecteur position,
- ▶ $[f(t)]$ le vecteur excitation.

On notera que la forme algébrique générale pour la dynamique fait en plus intervenir de l'amortissement (négligé pour l'analyse modale) :

$$[M] [\ddot{x}(t)] + [C] [\dot{x}(t)] + [K] [x(t)] = [f(t)] \quad (5)$$

Avec :

- ▶ $[C]$: la matrice d'amortissement associée au système,
- ▶ $[\dot{x}(t)]$ le vecteur vitesse.

Problème aux valeurs propres

Pour l'étude du comportement modal du système, on néglige l'amortissement et les efforts externes, le système algébrique se réduit à :

$$[M] [\ddot{x}(t)] + [K] [x(t)] = [0] \quad (6)$$

De plus, comme l'on s'intéresse aux résonnances du système dans le domaine fréquentiel, on fait l'hypothèse que le vecteur position peut s'écrire selon :

$$[x(t)] = [\phi] e^{i\omega t} \quad (7)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} [\dot{x}(t)] &= i\omega [\phi] e^{i\omega t} \\ [\ddot{x}(t)] &= -\omega^2 [\phi] e^{i\omega t} \\ [\ddot{x}(t)] &= -\omega^2 [x(t)] \end{aligned} \quad (8)$$

Problème aux valeurs propres

Le système linéaire devient ainsi :

$$([K] - \omega^2 [M]) [x(t)] = [0] \quad (9)$$

En multipliant par $e^{-i\omega t}$:

$$([K] - \omega^2 [M]) [\phi] = [0] \quad (10)$$

Ou encore en supposant $[M]$ inversible :

$$[M]^{-1} [K] [\phi] = \omega^2 [\phi] \quad (11)$$

La résolution du problème de départ se ramène ainsi à la recherche de couples $(\omega, [\phi])$ vérifiant Eq. (12).

Problème aux valeurs propres

Le problème algébrique obtenu :

$$[M]^{-1} [K] [\phi] = \omega^2 [\phi] \quad (12)$$

s'apparente ainsi à un problème de la forme :

$$[A] [\phi] = \lambda [\phi] \quad (13)$$

qui constitue l'expression canonique du problème de recherche des valeurs et vecteurs propres de la matrice $[A]$ où :

- ▶ la matrice $[A]$ est donnée,
- ▶ λ est une valeur propre de la matrice,
- ▶ $[\phi]$ est le vecteur propre associé à λ .

Problème aux valeurs propres

Si la matrice $[A] \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est de rang n , alors elle possède n couples $(\lambda_i, [\phi_i])$ (non nécessairement distincts - multiplicité > 1) vérifiant :

$$[A] [\phi_i] = \lambda_i [\phi_i] \quad (14)$$

L'analyse numérique fournit des algorithmes performants permettant de déterminer avec précisions les valeurs et vecteurs propres associés à une matrice donnée (méthodes de l'itération inverse, de Jacobi, de Ritz, du sous-espace...).

Problème aux valeurs propres

Les vecteurs propres sont orthogonaux :

$$[\phi_i]^T [\phi_j] = \delta_{ij} \quad (15)$$

On notera que les modes propres sont définis à une constante multiplicative près :

$$[A] (\alpha [\phi_i]) = \lambda_i (\alpha [\phi_i]) \quad (16)$$

Pour spécifier les modes de manière unique, on choisit généralement de réaliser une normalisation par rapport à la matrice masse :

$$[\phi_i]^T [M] [\phi_j] = \delta_{ij} \quad (17)$$

Ce qui conduit à :

$$[\phi_i]^T [K] [\phi_j] = \lambda_i \delta_{ij} \quad (18)$$

Décomposition modale

Etant donné un problème de dynamique avec second membre :

$$[M] [\ddot{x}(t)] + [K] [x(t)] = [f(t)] \quad (19)$$

A partir de $[M]$ et $[K]$ on peut extraire les n valeurs et vecteurs propres $(\omega_i^2, [\phi_i])_{1 \leq i \leq n}$:

$$[M]^{-1} [K] [\phi_i] = \omega_i^2 [\phi_i] \quad (20)$$

On construit alors la matrice de base modale :

$$[\Phi] = [[\phi_1] [\phi_2] \dots [\phi_n]] \quad (21)$$

qui a comme propriétés :

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [Id] \quad \text{et} \quad [\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Lambda] \quad (22)$$

où $[Id]$ est la matrice identité et $[\Lambda]$ est la matrice diagonale telle que $\Lambda_{ii} = \omega_i^2$.

On peut réaliser le changement de variables :

$$[x(t)] = [\Phi] [\xi(t)] \text{ et } [\ddot{x}(t)] = [\Phi] [\ddot{\xi}(t)] \quad (23)$$

Le système dynamique devient ainsi

$$\begin{aligned} [M] [\Phi] [\ddot{\xi}(t)] + [K] [\Phi] [\xi(t)] &= [f(t)] \\ [\Phi]^T [M] [\Phi] [\ddot{\xi}(t)] + [\Phi]^T [K] [\Phi] [\xi(t)] &= [\Phi]^T [f(t)] \\ [\ddot{\xi}(t)] + [\Lambda] [\xi(t)] &= [\Phi]^T [f(t)] \end{aligned} \quad (24)$$

Décomposition modale

Le système dynamique se résume alors à n équations différentielles découplées qui peuvent être résolues par des méthodes classiques :

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}_1(t) + \omega_1^2 \xi_1(t) &= g_1(t) \\ \ddot{\xi}_2(t) + \omega_2^2 \xi_2(t) &= g_2(t) \\ &\dots \\ \ddot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) &= g_n(t)\end{aligned}\tag{25}$$

Une fois ces n équations résolues et $[\xi(t)]$ déterminé, l'expression de $[x(t)]$ se déduit simplement par :

$$[x(t)] = [\Phi] [\xi(t)]\tag{26}$$

Solution système masses+ressorts

L'équation dynamique avait pour forme :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F(t) \end{bmatrix} \quad (27)$$

En prenant $m_1 = m_2 = m_3 = m$ et $k_1 = k_2 = k_3 = k$, le système devient :

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F(t) \end{bmatrix} \quad (28)$$

On cherche alors les valeurs et vecteurs propres de la matrice :

$$\left(m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Solution système masses+ressorts

Après calculs (avec Matlab), les valeurs et vecteurs propres de :

$$\frac{k}{m} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

sont pour les valeurs et fréquences propres (moyennant $\omega_i = 2\pi f_i$) :

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 0.1981 \frac{k}{m} \rightarrow f_1 = 0.0708 \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2^2 &= 1.5550 \frac{k}{m} \rightarrow f_2 = 0.1985 \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_3^2 &= 3.2470 \frac{k}{m} \rightarrow f_3 = 0.2868 \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned} \quad (31)$$

et pour les vecteurs (modes) propres :

$$[\phi_1] = \begin{bmatrix} -0.3280 \\ -0.5910 \\ -0.7370 \end{bmatrix}, \quad [\phi_2] = \begin{bmatrix} 0.7370 \\ 0.3280 \\ -0.5910 \end{bmatrix}, \quad [\phi_3] = \begin{bmatrix} -0.5910 \\ 0.7370 \\ -0.3280 \end{bmatrix} \quad (32)$$

On notera bien l'orthogonalité des modes propres.

Solution système masses+ressorts

3 Formulation du problème FEM pour la mécanique

- Equations de l'élasticité linéaire
- Formulation variationnelle
- Discrétisation géométrique - Maillage
- Discrétisation des champs élémentaires
- Discrétisation de la forme faible

Equations de l'élasticité linéaire

Le modèle physique envisagé décrit le comportement d'un solide déformable Ω soumis à des sollicitations de nature mécanique (contraintes normales et déplacements imposés sur le contour $\partial\Omega$, forces volumiques dans le domaine Ω). La branche des sciences physiques étudiant ce type de phénomène est la mécanique des milieux continus solides.

Hypothèses de modélisation :

- ▶ Petits déplacements,
- ▶ Petites déformations,
- ▶ Comportement élastique, linéaire et homogène.

Equations de l'élasticité linéaire (notation tensorielle)

- ▶ Equation d'équilibre statique, loi de comportement et relation de compatibilité :

$$\begin{aligned}\underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{b}} &= \underline{\underline{0}}, & \forall \underline{\underline{x}} \in \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, & \forall \underline{\underline{x}} \in \Omega \\ \underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{u}}) + \underline{\underline{\text{grad}}}^T(\underline{\underline{u}}) \right), & \forall \underline{\underline{x}} \in \Omega\end{aligned}\quad (33)$$

- ▶ Conditions-limites sur le contour du domaine en déplacements imposés et contraintes normales (tensions) imposées :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{u}} &= \underline{\underline{\tilde{u}}}, & \forall \underline{\underline{x}} \in \partial\Omega_u \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} &= \underline{\underline{\tilde{t}}}, & \forall \underline{\underline{x}} \in \partial\Omega_t\end{aligned}\quad (34)$$

Equations de l'élasticité linéaire (notation indicielle)

- ▶ Equation d'équilibre statique, loi de comportement et relation de compatibilité :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} + b_i &= 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), & \forall \underline{x} \in \Omega\end{aligned}\tag{35}$$

- ▶ Conditions-limites sur le contour du domaine en déplacements imposés et contraintes normales (tensions) imposées :

$$\begin{aligned}u_i &= \tilde{u}_i, & \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u \\ \sigma_{ij}n_j &= \tilde{t}_i, & \forall \underline{x} \in \partial\Omega_t\end{aligned}\tag{36}$$

Equations de l'élasticité linéaire (notation tensorielle)

Sont connues les expressions :

- ▶ Des opérateurs différentiels $\underline{\text{div}}$ et $\underline{\text{grad}}$,
- ▶ Du champ de force volumique \underline{b} (poids, forces d'inertie...),
- ▶ De la loi de comportement $\underline{\underline{C}}$,
- ▶ De la normale au domaine sortante \underline{n} et des champs en conditions-limites $\underline{\tilde{u}}$ et $\underline{\tilde{t}}$ sur le contour.

$$\underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{b} = \underline{0}, \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) + \underline{\underline{\text{grad}}}^T(\underline{u}) \right), \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

$$\underline{u} = \underline{\tilde{u}}, \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{\tilde{t}}, \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_t$$

Equations de l'élasticité linéaire (notation tensorielle)

Sont à déduire les expressions :

- ▶ Du champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$,
- ▶ Du champ de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$
- ▶ Du champ de déplacements \underline{u}
- ▶ On notera que ces quantités sont liées ($\underline{\underline{\sigma}} \propto \underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}} \propto \underline{u}$).

$$\underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{b} = \underline{0}, \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) + \underline{\underline{\text{grad}}}^T(\underline{u}) \right), \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

$$\underline{u} = \underline{\tilde{u}}, \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{\tilde{t}}, \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_t$$

Equations de l'élasticité linéaire (notation tensorielle)

Pour rappel :

- ▶ Le champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ représente la manière dont la matière est sollicitée mécaniquement dans les différentes directions par des actions de traction/compression et de cisaillement. L'état de contraintes en un point est représenté par un tenseur d'ordre 2 symétrique à valeurs dans \mathbb{R} et de dimension 3×3 dans \mathbb{R}^3 . Il comprend 6 composantes distinctes et a comme expression en coordonnées cartésiennes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Pour rappel :

- ▶ Le champ de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ décrit la manière dont la matière s'accommode géométriquement aux charges mécaniques subies. Il quantifie de manière relative les allongements/rétrécissements (traction/compression) et les distorsions (cisaillement) locaux. Sa représentation tensorielle est de même nature que celle de $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (38)$$

La formulation forte du problème d'élasticité ne possède nativement de solutions analytiques que dans de rares cas (souvent académiques). Afin d'accéder à une estimation de la solution, il convient alors de transformer cette forme forte en une forme faible (ou variationnelle) :

- ▶ Qui accepte pour solution celle du problème fort,
- ▶ Qui se prête à l'application d'outils d'algèbre,
- ▶ Dont la solution discrétisée tend vers celle du problème initial.

Le **premier affaiblissement** de la forme forte (ici l'équation d'équilibre) passe par la pondération de cette équation par un champ virtuel \underline{u}^* :

$$\underline{u}^* \cdot (\underline{\operatorname{div}}(\underline{\sigma}) + \underline{b}) = 0 \quad (39)$$

Le champ virtuel \underline{u}^* a la dimension d'un déplacement. L'équation Eq. (39) étant vraie $\forall \underline{u}^*$, nous choisissons en particulier \underline{u}^* dans l'ensemble des fonctions continues cinématiquement admissibles (ie vérifiant $\underline{u}^* = \tilde{\underline{u}}, \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u$).

Formulation variationnelle

Le **deuxième affaiblissement** de la forme forte consiste à intégrer Eq. (39) sur le domaine de définition spatial du problème :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{u}^* \cdot (\underline{\operatorname{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{b}) \, dV &= 0 \\ - \int_{\Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{\operatorname{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) \, dV &= \int_{\Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{b} \, dV \end{aligned} \quad (40)$$

En se rappelant que $\underline{\underline{\sigma}}$ dépend linéairement de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ au travers de la loi de comportement et qu'ensuite $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dérive (au premier ordre) de \underline{u} , il vient :

$$- \int_{\Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{\operatorname{div}}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u})) \, dV = \int_{\Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{b} \, dV \quad (41)$$

Formulation variationnelle

Le **troisième (et dernier) affaiblissement** de la forme forte consiste à transformer l'intégrale de Eq. (41) contenant \underline{u} et \underline{u}^* de sorte à équilibrer leurs ordres de différentiation respectifs (initialement 0 pour \underline{u}^* et 2 pour \underline{u}).

A cette fin est utilisée la formule de Green (dont le théorème de la divergence est un cas particulier ; pour rappel, en 1D cette formule donne l'IPP) :

$$\int_{\Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{\operatorname{div}}(\underline{\sigma}) dV = \int_{\partial\Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS - \int_{\Omega} \underline{\operatorname{grad}}(\underline{u}^*) : \underline{\sigma} dV \quad (42)$$

L'équation variationnelle finale a donc pour expression :

$$\int_{\Omega} \underline{\operatorname{grad}}(\underline{u}^*) : \underline{\sigma}(\underline{u}) dV = \int_{\Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{b} dV + \int_{\partial\Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS \quad (43)$$

Formulation variationnelle

On montre que l'expression Eq. (43) peut également s'écrire sous la forme suivante (on exploite pour cela la propriété de symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$) :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*) : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) \, dV = \int_{\Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{b} \, dV + \int_{\partial\Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \, dS \quad (44)$$

On observe que l'équation scalaire précédente a la dimension d'une énergie (ou d'un travail). Le membre de droite traduit les effets associés aux charges (volumiques et surfaciques) appliquées sur le solide tandis que celui de gauche représente l'énergie mécanique stockée par le solide du fait de sa déformation.

- ▶ Energie de déformation élastique du système :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}}^*) : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{u}}) dV \quad (45)$$

- ▶ Travail des efforts volumiques :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{u}}^* \cdot \underline{\underline{b}} dV \quad (46)$$

- ▶ Travail des efforts surfaciques :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{\underline{u}}^* \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} dS \quad (47)$$

Le domaine de définition de l'équation est subdivisé en sous-domaines dont la réunion donne le domaine initial tout en étant disjoints 2 à 2 :

$$\begin{aligned}\Omega &= \bigcup_e^{n_e} \Omega_e \\ \bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j &= \bar{\Omega}_i && \text{si } i = j \\ &= \emptyset && \text{sinon}\end{aligned} \tag{48}$$

Le processus de discrétisation de la géométrie constitue une source potentielle d'erreur. Le type de maille choisi peut en effet ne pas permettre un pavage parfait du domaine (ex. la discrétisation d'un disque par des mailles triangulaires). L'erreur peut toutefois être diminuée en raffinant la taille de maille dans les zones critiques.

Supports géométriques du maillage :

- ▶ 1D (segment),
- ▶ 2D (triangle, quadrangle),
- ▶ 3D (tetraèdre, hexaèdre, wedge).

1259 mailles 2D tri. 563 mailles 2D quad.

Supports géométriques du maillage :

- ▶ 1D (segment),
- ▶ 2D (triangle, quadrangle),
- ▶ 3D (tetraèdre, hexaèdre, wedge).

23839 mailles 3D tetra. 8730 mailles 3D hexa.

Discrétisation des champs élémentaires

Les champs inconnus dans la formulation FEM standard sont des déplacements. Sur chacune des mailles discrétisant le domaine, les restrictions de ces champs sont représentées par des fonctions caractérisées par :

- ▶ la dimension de la représentation 1D, 2D, 2D 1/2, 3D (...),
- ▶ la base de décomposition utilisée (polynômes, fonctions singulières, fonctions périodiques ...),
- ▶ pour les polynômes, l'ordre de l'interpolation élémentaire (constant, linéaire, quadratique...).

Discrétisation de la forme faible

En combinant la discrétisation de la géométrie du domaine et celle des champs élémentaires, le problème d'élasticité prend la forme discrétisée suivante :

$$\begin{aligned} \sum_e^{N_{\Omega_e}} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{*e}) : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}^e) dV &= \sum_e^{N_{\Omega_e}} \int_{\Omega_e} \underline{u}^{*e} \cdot \underline{b} dV \\ &+ \sum_e^{N_{\partial\Omega_e}} \int_{\partial\Omega_e} \underline{u}^{*e} \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}^e) \cdot \underline{n} dS \end{aligned} \quad (49)$$

Discrétisation de la forme faible

Les contributions élémentaires sont intégrées (analytiquement ou numériquement) sur leurs supports respectifs et peuvent ensuite être réécrites en introduisant :

- ▶ une matrice de rigidité $[k^e]$ pour l'énergie de déformation,
- ▶ un vecteur de force $\{b^e\}$ pour le travail des forces volumiques,
- ▶ un vecteur de force $\{F^e\}$ pour le travail des efforts de contour.

L'équation précédente devient ainsi :

$$\sum_e^{N_{\Omega_e}} \langle u^{*e} \rangle [k^e] \{u^e\} = \sum_e^{N_{\Omega_e}} \langle u^{*e} \rangle \{b^e\} + \sum_e^{N_{\partial\Omega_e}} \langle u^{*e} \rangle \{F^e\} \quad (50)$$

Discrétisation de la forme faible

L'assemblage des contributions élémentaires est réalisé en respectant les données de maillage contenues dans les tables de coordonnées (1 noeud \rightarrow ses coordonnées) et de connectivité (1 élément \rightarrow indices de ses noeuds).

Il apparaît in fine :

- ▶ la matrice de rigidité globale $[K]$ pour l'énergie de déformation,
- ▶ un vecteur de force global $\{f\}$ pour le travail des efforts appliqués au solide,
- ▶ les vecteurs $\{U\}$ et $\langle U^* \rangle$ associés à l'ensemble des inconnues de déplacement nodales.

L'équation précédente devient :

$$\langle U^* \rangle [K] \{U\} = \langle U^* \rangle \{f\} \quad (51)$$

Ayant fait le choix d'une fonction \underline{u}^* quelconque dans l'ensemble des fonctions continues cinématiquement admissibles, la simplification algébrique par $\langle U^* \rangle$ dans les deux membres de la relation algébrique précédente est licite.

Le résolution du problème continu initial est donc ramenée à celle du problème algébrique suivant :

$$[K]\{U\} = \{f\} \quad (52)$$

Types d'éléments

continus 1D, 2D, 3D, 2D axi, poutres (Euler-Bernoulli...), plaques (Mindlin-Reissner...), coques

4 Aspects logiciels

- Structure d'un logiciel de calcul FEM
- Logiciels du commerce
- Rappels de mécanique du solide

Structure d'un logiciel de calcul FEM

pre, simu, post...

Ansys, Abaqus, Nastran...

Quantifications scalaires de l'état de contraintes

- ▶ contraintes équivalentes (VM, Tresca...)
- ▶ contraintes principales