

**M2 – MN91**

# **Mécanique non linéaire**

Zhi-Qiang FENG

**UFR Science et Technologies**  
**Université d'Evry Val d'Essonne**

# TABLES DES MATIERES

## INTRODUCTION

### Chapitre 1 : CONCEPTS ELEMENTAIRES

- 1.1 Principales propriétés des matériaux
- 1.2 Connaissance et utilisation des matériaux
- 1.3 Les grandes classes de matériaux
- 1.4 Méthodes expérimentale - types d'essais
- 1.5 Les grandes classes de comportement
- 1.6 Formulation des lois de comportement
- 1.7 Choix des lois de comportement
- 1.8 Comportement viscoélastique
- 1.9 Viscoélasticité linéaire
- 1.10 Modèles rhéologiques viscoplastiques

### Chapitre 2 : PLASTICITE ET VISCOPLASTICITE 1D

- 2.1 Plasticité uniaxiale
  - 2.1.1 *Modèle rhéologique patin-ressort*
  - 2.1.2 *Modèle de Prager – Ecrouissage cinématique*
  - 2.1.3 *Écriture générale des équations de l'élastoplasticité uniaxiale*
  - 2.1.4 *Modèle de Taylor – Ecrouissage isotrope*
- 2.2 Viscoplasticité uniaxiale
- 2.3 Quelques modèles classiques en viscoplasticité

## Chapitre 3 : PLASTICITE ET VISCOPLASTICITE 3D

### 3.1 Critères de plasticité

*3.1.1 Exemple d'un treillis métallique*

*3.1.2 Les outils disponibles*

*3.1.3 Critères ne faisant pas intervenir la pression hydrostatique*

*3.1.4 Critères faisant intervenir la pression hydrostatique*

*3.1.5 Critères anisotropes*

### 3.2 Cadre général de la formulation des lois de comportement

*3.2.1 Décomposition de la déformation*

*3.2.2 Critères*

*3.2.3 Lois d'écoulement*

*3.2.4 Lois d'écrouissage*

### 3.3 Formulation des lois de comportement viscoplastique

*3.3.1 Ecriture générale*

*3.3.2 Exemple : Modèle de Norton généralisé (loi d'Odqvist)*

*3.3.3 De la viscoplasticité à la plasticité*

### 3.4 Formulation des lois de comportement plastique

*3.4.1 Formulation générale*

*2.4.2 Principe du travail maximal*

### 3.5 Directions d'écoulement associées aux critères courants

*3.5.1 Critère de von Mises*

*3.5.2 Critère de Tresca*

*3.5.3 Critère de Drücker-Prager*

### 3.6 Quelques lois particulières en plasticité

*3.6.1 Lois de Prandtl-Reuss*

*3.6.2 Lois de Prager*

*3.6.3 Ecoulement à vitesse de déformation totale imposée*

REFERENCES

## **Chapitre 4 : MODELISATION EN PETITES ET GRANDES DEFORMATIONS ELASTOPLASTIQUES**

### 4.1 Introduction

### 4.2 Modèles de petites déformations élastoplastiques

#### *4.2.1 Petites déformations élastoplastiques*

#### *4.2.2 Calcul du multiplicateur plastique théorique*

#### *4.2.3 Calcul de la matrice tangente théorique*

#### *4.2.4 Intégration des lois de comportement*

##### *4.2.4.1 Calcul de $\Delta\lambda$*

##### *4.2.4.2 Calcul de la matrice tangente consistante*

#### *4.2.5 Programmation en C++*

### 4.3 Modèles de grandes déformations élastoplastiques

#### *4.3.1 Description des grandes transformations*

#### *4.3.2 Intégration des lois de comportement en grandes transformations*

### 4.4 Exemples numériques

#### REFERENCES

## **Chapitre 5 : MODELISATION DE LA MISE EN FORME DES MATERIAUX EN GRANDES DEFORMATIONS RIGIDE-VISCOPLASTIQUES**

### 5.1 Introduction

### 5.2 Hypothèses et loi de comportement

### 5.3 Principe variationnel

### 5.4 Discrétisation et formulation des éléments finis

### 5.5 Applications numériques

#### *5.5.1 Forgeage d'un lopin axisymétrique*

#### *5.5.2 Forgeage d'un disque axisymétrique*

### 5.6 Approche analytique relative au forgeage d'un lopin axisymétrique

### 5.7 Conclusion

#### REFERENCES

## **Chapitre 6 : MODELISATION DES PROBLEMES DE CONTACT AVEC FROTTEMENT**

- 6.1 Introduction
- 6.2 Lois de contact et de frottement
- 6.3 Algorithme local
- 6.4 Algorithme global
- 6.5 Exemples numériques
- 6.6 Conclusion

REFERENCES

## **Chapitre 7 : MODELISATION DES GRANDES DEFORMATIONS HYPERELASTIQUES**

- 7.1 Introduction
- 7.2 Cas d'étude : Cube en compression dans un container rigide
- 7.3 Travaux Pratiques sur ANSYS
- 7.4 Publications

### **1.1 Principales propriétés des matériaux**

On distingue plusieurs types de propriétés des matériaux selon leur utilisation. Dans le cas du développement des ordinateurs, ce sont essentiellement les propriétés physiques qui sont en cause. Dans le cas du développement des moteurs d'avions, ce sont les propriétés mécaniques et chimiques qui sont déterminantes. Les principales propriétés des matériaux se regroupent donc en :

➤ **Propriétés mécaniques**

- modules d'élasticité, - limite d'élasticité, écrouissage, ductilité.
- viscosité, vitesse de fluage, amortissement
- charge à la rupture, résistance à la fatigue, à l'usure, ...

➤ **Propriétés physiques**

- conductibilité électrique, aimantation,
- conductibilité thermique, chaleur spécifique, - température et chaleur latente de transformation,
- énergie de surface, de liaison, - transparence.

➤ **Propriétés chimiques**

- résistance à la corrosion, à l'oxydation, - stabilité, diagrammes d'équilibre.

En général, le choix d'un matériau pour une application donnée est la conséquence de propriétés adaptées dans un ou plusieurs des domaines indiqués (par exemple l'aluminium est parfois utilisé dans les culasses automobiles malgré sa faible température de fusion, en raison de son faible poids et de sa bonne conductibilité thermique). Il est aussi orienté par d'autres considérations, ce sont les performances du matériau, au rang desquelles vont se classer des éléments technologiques et économiques, en même temps que des caractéristiques moins facilement mesurables comme l'aspect (fondamental dans le bâtiment pour les éléments de façade, pour les carrosseries automobiles, ... ) :

- disponibilité, reproductibilité, fiabilité, usinabilité, aptitude à la mise en forme, soudabilité,
- absence de nocivité, possibilité de recyclage, coût, aspect, bonne caractérisation.

### **1.2 Connaissance et utilisation des matériaux**

La bonne connaissance des matériaux et leur bonne utilisation font intervenir trois domaines d'activité.

1. Le développement du matériau lui-même (ce secteur étant absent dans le cas des géomatériaux). Là se jouent l'évolution du matériau, la découverte de nouvelles microstructures, qui concourent à l'amélioration des performances intrinsèques.
2. La caractérisation des propriétés d'emploi. Ce point a pour but d'apporter une meilleure connaissance d'un matériau existant, (mécanismes physiques qui provoquent ou accompagnent la déformation, effets mécaniques macroscopiques), donc de réduire les incertitudes et d'augmenter la fiabilité des modèles utilisés.
3. Le travail sur les modèles numériques permet d'améliorer la représentation des pièces, structures ou domaines calculés (par amélioration des algorithmes, qui autorisent le traitement de modèles numériques plus importants, par exemple 3D au lieu de 2D).

La Mécanique des Matériaux Solides est consacrée uniquement à l'étude des propriétés mécaniques des matériaux (point 2). Le point (1) est le domaine des métallurgistes et des chimistes. Le point (3) est celui de la Mécanique des Structures.

### **1.3 Les grandes classes de matériaux**

Il est important de souligner que la modélisation numérique par éléments finis n'ont pas une application réduite à un seul matériaux, mais que les théories étudiés peuvent être utilisées dans des domaines industriels très divers. Les modèles qui seront considérés s'appliquent aux :

- métaux, céramiques, polymères, composites, bois, béton, sols (sables et roches), biomatériaux (os, tissus).

### **1.4 Méthodes expérimentale - types d'essais**

Il existe de nombreux essais qui permettent de caractériser les propriétés mécaniques des matériaux. Certains sont normalisés :

- AFNOR        - Association Française de NORmalisation
- ISO            - International Standardisation Organisation

**Essai d'écroutissage** : Un essai de traction ( $\sigma > 0$ ) ou de compression ( $\sigma < 0$ ) réalisé à vitesse de déformation constante sur un matériau réel donne des résultats en termes d'efforts et de déplacement, que l'on cherche ensuite à convertir en une courbe contrainte - déformation ( $\sigma$  en fonction de  $\epsilon$ ). Dans le cas des métaux et des matériaux composites par exemple, les éprouvettes sont des cylindres munis en général de têtes d'amarrage filetées ou des plaques de section rectangulaire. Pour les roches (et pour les métaux en grandes déformations), les expériences sont réalisées sur des cylindres, qui sont comprimés entre les plateaux d'une presse. Pour le cas de la compression simple, il faut porter une grande attention aux conditions aux limites, en autorisant le meilleur glissement possible sur les appuis, faute de quoi se développent dans l'éprouvette des champs de contrainte et de déformation complexes (mise en tonneau de l'échantillon).

Les courbes obtenues à l'aide de cet essai ont typiquement l'allure indiquée en Figure 1.1 lorsque le comportement du matériau observé est indépendant de la vitesse (comportement de plasticité indépendante du temps).

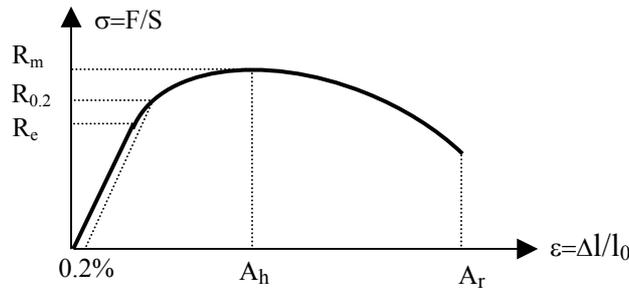


Figure 1.1: Schéma d'un essai de traction simple

Le comportement fait apparaître une partie linéaire (élasticité) suivie d'une partie non linéaire, au cours de laquelle la pente diminue dans le diagramme déformation-contrainte, au point de devenir éventuellement négative.

- $R_e$  désigne la limite d'élasticité ou limite de proportionnalité,
- $R_{0,2}$  désigne la limite d'élasticité conventionnelle, qui correspond à une déformation inélastique de 0.2%,
- $R_m$  désigne la résistance à la traction,
- $A_h$  désigne l'allongement obtenu à la contrainte maximale,
- $A_r$  désigne l'allongement à la rupture.

Quoique d'apparence simple, il s'agit en fait d'un essai dont l'interprétation peut devenir délicat, puisque la diminution de pente observée peut recouvrir des phénomènes physiques très différents, et surtout que le passage à des pentes négatives est en général lié au fait que le champ de déformation n'est plus uniforme (phénomène de striction).

La figure 1.2 quant à elle montre l'allure des courbes obtenues lorsque le matériau testé est sensible à la vitesse de déformation. Les courbes expérimentales sont situées entre deux courbes théoriques limites correspondant l'une à une vitesse de déformation infinie (comprendre: grande) et l'autre à une vitesse nulle (comprendre: faible). Cette dernière courbe est importante, puisqu'elle représente la réponse du matériau durant les transformations quasi-statiques et décrit son comportement à long terme. Il s'agit de l'ensemble des points ( $\sigma-\epsilon$ ) représentant les états par lesquels passe le matériau pendant que la déformation augmente à vitesse quasiment nulle (succession d'états d'équilibre limite).

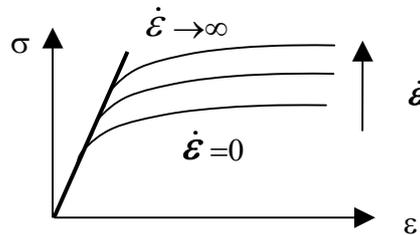


Figure 1.2: Réponse d'un matériau viscoplastique en traction simple

**Essai de fluage:** (déformation continue sous contrainte constante)

Lorsqu'une éprouvette est soumise à une traction simple (essai monodimensionnel sous une contrainte et une déformation), si, à partir d'un certain état, la contrainte est maintenue constante, la déformation restera constante (absence de déformations différées dans le temps) s'il n'y a aucune viscosité. En fait, dans le cas d'un matériau réel (conçu par l'homme ou existant déjà dans la nature), des déformations différées (phénomène de viscosité) seront alors observées de façon à peu près systématique, à tel point qu'il faut admettre que tous les matériaux réels présentent ce phénomène de viscosité, pourvu qu'une période de temps suffisamment grande soit considérée. Ainsi, si une éprouvette cylindrique d'une roche saline d'une dizaine de

centimètres est soumise à une pression axiale d'une dizaine de MPa, pression maintenue constante, et que sa hauteur est mesurée au bout d'une journée. puis une journée plus tard avec une précision absolue de 1 mm, alors, à température ambiante, aucune variation de longueur ne sera détectée. Il ne faut pas en déduire que les roches salines à température ambiante ne présentent pas de viscosité. car, en augmentant la précision de la mesure ou en attendant plus longtemps (un mois de fluage par exemple), il est possible d'observer des déformations différées.

**Essai de relaxation:** (diminution des contraintes sous déformation constante)

Une autre manière de caractériser la viscosité d'un matériau est de le soumettre à un essai de relaxation, dans lequel la déformation de l'éprouvette est maintenue constante après une prédéformation initiale. Plus le comportement du matériau présente une composante visqueuse importante, et plus la contrainte chute rapidement, pour atteindre éventuellement une valeur nulle. Cet essai est essentiellement réalisé sur les métaux et les polymères.

**Essai triaxial.** Certains matériaux ne peuvent pas être testés simplement en traction, en raison de leur très faible résistance, ou de leur forte sensibilité aux décentrages des lignes d'amarrage (béton, céramique). Ils sont alors testés en compression, ou en flexion. La compression uniaxiale sur des cylindres a déjà été décrite, mais il est parfois nécessaire d'avoir recours à un mode de sollicitation où les bords latéraux sont contenus (essai triaxial) : l'échantillon est soumis latéralement à une pression hydrostatique qui assure son maintien, ce qui permet par exemple de tester des matériaux pulvérulents (argiles, sables).

**Essai de flexion:** Il est réalisé sur des barrettes, avec 3 ou 4 points d'appuis.

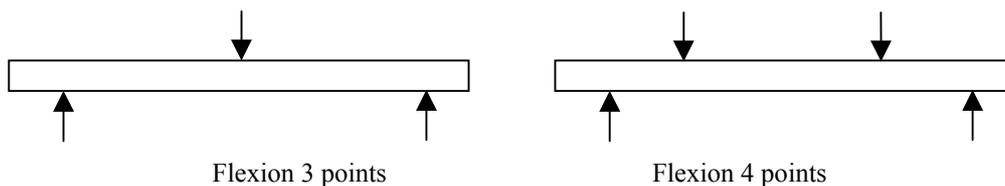


Figure 1.3 : Schéma d'essais de flexion

L'essai de flexion 4 points permet de bénéficier d'une zone centrale dans laquelle le moment est uniforme. L'essai de flexion est essentiellement utilisé avec des matériaux fragiles, dont le comportement sera élastique. La plastification, associée au fait que le comportement en traction et en compression peut être différent, conduit à des redistributions de contraintes complexes dans l'éprouvette, si bien que le dépouillement de l'essai lui-même nécessite un calcul des structures.

Dans un même ordre d'idée, il existe également des essais de flexion rotatives dans lesquels une éprouvette en rotation, encastree à une extrémité, subit un effort perpendiculaire à son axe, si bien que les points de la surface extérieure voient leur état de contrainte passer alternativement de la traction à la compressions. Ces essais sont utilisés pour déterminer la limite de fatigue, sollicitation en dessous de laquelle le matériau résistera à un chargement répété.

**Essai de torsion :** Réalisé sur éprouvette pleine, cet essai est essentiellement utilisé à haute température pour connaître l'aptitude à la mise en forme des métaux. L'avantage de ce type d'essai est d'éviter la striction. Par contre, il est d'interprétation difficile, dans la mesure où l'état de contrainte et déformation n'est pas uniforme. Il est possible de remédier à ce dernier inconvénient, en adoptant comme éprouvettes des tubes minces. qui peuvent être instrumentés localement, à l'aide de jauges ou d'extensomètres.

**Essai de dureté:** Largement employé comme moyen de contrôle, il mesure la résistance à la pénétration d'indenteurs de diverses formes, par exemple une bille d'acier de gros diamètre (10 mm) dans le cas de l'essai Brinell, ou une pyramide diamant à base carrée, l'angle entre les faces opposées étant de 136° pour l'essai Vickers. Une relation empirique indique que, dans les aciers doux, la dureté Vickers (force/dimension de l'empreinte) est de l'ordre de 3 fois la résistance à la traction.

**Essai Charpy:** Il permet de caractériser sur un barreau entaillé le passage d'un mode de rupture ductile, accompagné de déformation inélastique, donc à forte énergie, à un mode de rupture fragile, présent à plus basse température, qui ne met en jeu que des énergies faibles.

**Essais complexes :** Outre les essais de traction-torsion sur tube, il existe d'autres moyens de générer des états de contraintes multiaxiales contrôlés dans des éprouvettes. C'est le cas d'essais de traction-pression interne sur tube, ou encore d'essais sur des éprouvettes cruciformes.

## 1.5 Les grandes classes de comportement

L'allure qualitative de la réponse des matériaux à quelques essais simples permet de les ranger dans des classes bien définies. Ces comportements "de base", qui peuvent être représentés par des systèmes mécaniques élémentaires, sont l'élasticité, la plasticité et la viscosité. Les éléments les plus courants sont, en Figure.1.4:

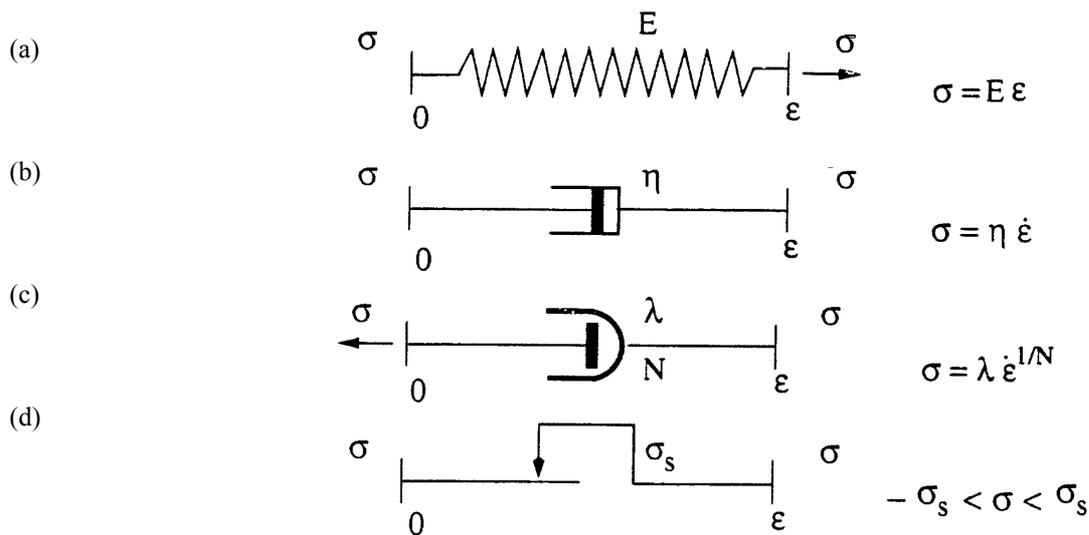


Figure 1.4: Les "briques de base" pour la représentation des comportements

1. **Le ressort** qui symbolise l'élasticité linéaire parfaite, pour laquelle la déformation est entièrement réversible lors d'une décharge, et où il existe une relation biunivoque entre les paramètres de charge et de déformation (fig.1.4a).
2. **L'amortisseur**, qui schématise la viscosité, linéaire (fig.1.4b) ou non (fig.1.4c). La viscosité est dite pure s'il existe une relation biunivoque entre la charge et la vitesse de chargement. Si cette relation est linéaire, le modèle correspond à la loi de Newton.
3. **Le patin**, qui modélise l'apparition de déformations permanentes lorsque la charge est suffisante (fig.1.4d). Si le seuil d'apparition de la déformation permanente n'évolue pas avec le chargement, le comportement est dit plastique parfait. Si, de plus, la déformation avant écoulement est négligée, le modèle est rigide-parfaitement plastique.

Ces éléments peuvent être combinés entre eux pour former des **modèles rhéologiques**. Ceux-ci représentent des systèmes mécaniques qui servent de support dans la définition des modèles. Il ne faut en aucun cas leur accorder un trop grand crédit pour ce qui concerne la représentation des phénomènes physiques qui sont à la base des déformations. La réponse de ces systèmes peut être jugée dans 3 plans différents, qui permettent d'illustrer le comportement lors d'essais de type:

- **écrouissage**, ou augmentation monotone de la charge ou de la déformation, (plan  $\epsilon-\sigma$ );
- **fluage**, ou maintien de la charge (plan  $t-\epsilon$ );
- **relaxation**, ou maintien de la déformation (plan  $t-\sigma$ ).

Les réponses de modèles classiques sont reportées dans ces 3 plans pour les cas :

- (a) du solide élastique,  $\sigma = E \epsilon$ ,
- (b) du solide viscoélastique (modèle de Voigt), qui comporte un ressort et un amortisseur en parallèle,  $\sigma = \eta \dot{\epsilon} + E \epsilon$ ,
- (c) du solide élastique-parfaitement plastique, (modèle de Saint-Venant), constitué par un ressort linéaire et un patin en série; lorsque le module  $E$  tend vers l'infini, le modèle devient rigide-parfaitement plastique,
- (d) du solide élastique-plastique écrouissable, (modèle de Saint-Venant généralisé), qui donne une courbe de traction linéaire par morceaux,
- (e) du solide élastique-parfaitement viscoplastique, (modèle de Norton), formé par un amortisseur non linéaire, ou modèle de Bingham-Norton, qui comporte un ressort linéaire en série avec un amortisseur et un patin situés en parallèle; lorsque le seuil du patin tend vers zéro, et que l'amortisseur est choisi linéaire, ce dernier modèle dégénère en un modèle de fluide visqueux, modèle de Maxwell, comportant un ressort et un amortisseur en série,  $\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/E + \sigma/\eta$ ,
- (f) du solide élastique-viscoplastique écrouissable, qui représente le schéma le plus complexe.

## 1.6 Formulation des lois de comportement

Les modèles rhéologiques qui sont décrits dans le paragraphe précédent illustrent les différents comportements qui vont être considérés dans la suite du cours. L'utilisation d'équations de ce type fait intervenir un certain nombre d'hypothèses implicites. Excepté le cas de l'élasticité, l'ensemble des modèles considérés précédemment s'expriment sous forme différentielle, si bien que la réponse actuelle dépend de la sollicitation actuelle et de son **histoire** (propriété d'hérédité). Il y a deux manières de prendre en compte cette histoire, la première consiste à la décrire par une dépendance fonctionnelle entre les variables, la seconde fait l'hypothèse qu'il est possible de représenter l'effet de l'histoire dans des **variables internes**, qui "concentrent" les informations importantes qui définissent l'état du matériau. Sauf quelques cas exceptionnels comme celui

de la viscoélasticité linéaire, la seconde méthode de travail produit des modèles dont la modélisation numérique est plus simple. Les autres hypothèses importantes qui sont classiquement utilisées pour l'écriture de modèles de comportement sont :

1. Le principe de **l'état local**, qui considère que le comportement en un point ne dépend que des variables définies en ce point, et non pas du voisinage ;
2. Le principe de **simplicité matérielle**, qui suppose que seul intervient dans les équations de comportement le premier gradient de la transformation ;
3. Le principe **d'objectivité**, qui traduit l'indépendance de la loi de comportement vis-à-vis de l'observateur, et qui implique que le temps ne peut pas intervenir explicitement dans les relations de comportement.

Dans le cas des matériaux homogènes et isotropes, l'ensemble de ces hypothèses se résume par une expression entre les contraintes et les déformations du type :  $\sigma(t) = \Gamma_{\tau < t}(\epsilon(\tau))$  où  $\Gamma$  est la fonctionnelle de réponse du matériau.

### 1.7 Choix des lois de comportement

#### Comportements viscoélastique :

- pour les polymères thermoplastiques au voisinage de la température de fusion,
- pour les verres au voisinage de la température de transition,
- pour les bétons frais.

#### Comportements rigides-parfaitement plastiques :

- pour l'étude des sols,
- pour l'analyse limite,
- pour la mise en forme des métaux.

#### Comportements plastiques :

- pour les métaux à des températures inférieures au quart de la température de fusion,
- pour les sols et roches.

#### Comportements viscoplastiques

- pour les métaux à moyenne et haute température,
- pour le bois, les sols (dont le sel),
- pour les céramiques à très haute température.

Il faut noter que chacun de ces types de modèles est approché, et que le choix de l'une ou l'autre modélisation du comportement va dépendre de l'application visée. Ainsi un acier à température ambiante peut être considéré comme élastique linéaire pour le calcul des flèches d'une structure mécanique, viscoélastique pour un problème d'amortissement de vibrations, rigide-parfaitement plastique pour un calcul de charge limite, élasto-viscoplastique pour l'étude de contraintes résiduelles, ... un polymère peut être considéré comme un solide pour un problème de choc, et comme un fluide pour l'étude de sa stabilité sur de longues durées.

L'ingénieur chargé du dimensionnement de cavités de stockage de déchets nucléaires dans un massif salin ne peut pas négliger le comportement différé de cette roche, car la pérennité de l'ouvrage est exigée pour des dizaines d'années voire des siècles. Alors qu'une galerie d'une exploitation minière dont on n'a besoin que pour quelques jours peut être modélisée dans le cadre de l'élastoplasticité (en négligeant la viscosité). Dans le cas de matériaux métalliques opérant au dessus du tiers de leur température de fusion, la prise en compte de la viscoplasticité est également nécessaire, lorsque l'ingénieur s'intéresse à de "longues" durées (par exemple pour certifier la tenue de composants de centrale nucléaire sur une quarantaine d'années), parfois même pour des fonctionnements relativement courts, ainsi par exemple dans les aubes de turbines aéronautiques.

### 1.8 Comportement viscoélastique

Les relations de l'élasticité linéaire, supposent en petites déformations une relation linéaire entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations, qui s'exprime en uniaxial:

$$\sigma = E \epsilon$$

Cette hypothèse est en défaut pour des solides tels que les polymères, les verres au dessus de la température de transition vitreuse, ou, dans une moindre mesure, les bétons, sur une large échelle de temps: une caractéristique nouvelle du comportement est alors la présence de déformations différées: il y a évolution de la déformation, quel que soit le niveau de charge appliqué, et quelle que soit l'histoire antérieure du chargement. Ce type de comportement peut être modélisé de la viscosité, qui suppose l'existence d'une relation entre contrainte et vitesse de déformation. Le cas où la relation est linéaire correspond à la loi de Newton ( $\eta$  représentant la viscosité du matériau):

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon}$$

Un matériau sera viscoélastique si les comportements d'élasticité et de viscosité sont présents simultanément. La figure 1.5 regroupe les réponses classiques d'un matériau viscoélastique à quelques sollicitations fondamentales.

Lorsque le matériau subit à partir d'un instant  $t_0$  un échelon de contrainte (Fig.1.5a), il présente une déformation instantanée, suivie d'une déformation différée, ou retardée, c'est l'expérience de **fluage** ou de **retard** (Fig.1.5b). Si, au-delà d'un instant  $t_1$ , la charge est ramenée à zéro, il apparaît, après une nouvelle déformation instantanée, le phénomène de **recouvrance**, qui tend à ramener la déformation à zéro. La fonction de retard est une fonction croissante du temps  $t$ , qui peut dépendre aussi de la contrainte  $\sigma_0$ , non nulle pour  $t > t_0$ .

Si au contraire la sollicitation imposée est une déformation, appliquée à partir d'un instant  $t_0$  (Fig.1.5c), il s'agit d'une expérience de **relaxation**, au cours de laquelle la contrainte diminue à partir d'une valeur obtenue lors de la réponse instantanée (Fig.1.5d). Le fait de ramener la déformation à zéro après un instant correspond à l'expérience d'**effacement**, pendant laquelle la contrainte tend vers zéro. Le comportement sera dit viscoélastique si, au cours de cette dernière expérience, l'effacement est total, c'est-à-dire que la contrainte revient effectivement à zéro. La fonction de relaxation est une fonction décroissante du temps  $t$ , qui peut dépendre aussi de la déformation  $\epsilon_0$ , non nulle pour  $t > t_0$ .

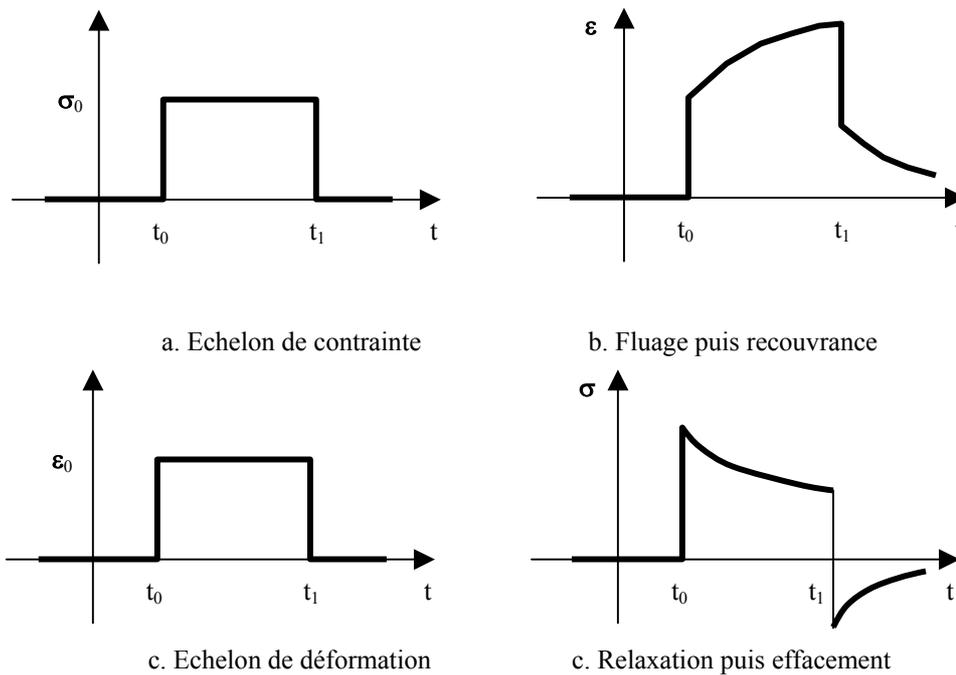


Figure 1.5 : Expériences fondamentales en viscoélasticité

## 1.9 Viscoélasticité linéaire

En toute généralité, une loi de comportement s'exprime comme une correspondance fonctionnelle entre l'histoire des contraintes et celle des déformations, qui peut être notée:

$$\epsilon(t) = \Gamma_{\tau < t}(\sigma(\tau))$$

Par définition, un comportement sera viscoélastique linéaire si, considérant deux histoires de contraintes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , et leur réponses  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ , la réponse obtenue pour la combinaison linéaire  $(\lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2)$  est  $(\lambda_1 \epsilon_1 + \lambda_2 \epsilon_2)$ . La linéarité du comportement se traduit par le principe de superposition de **Boltzman** : si l'on suppose deux histoires de sollicitation, la réponse est la superposition des réponses.

$$\epsilon(t) = \Gamma_{\tau < t}(\sigma_1 + \sigma_2) = \Gamma_{\tau < t}(\sigma_1) + \Gamma_{\tau < t}(\sigma_2)$$

## 1.10 Modèles rhéologiques viscoplastiques

**Modèle de Maxwell** : Ce modèle regroupe un amortisseur et un ressort en série (Fig.1.6a). L'équation du modèle est :

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

**Modèle de Voigt :** Ce modèle regroupe un amortisseur et un ressort en parallèle (Fig.1.6b). L'équation du modèle est :

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} + H \epsilon$$

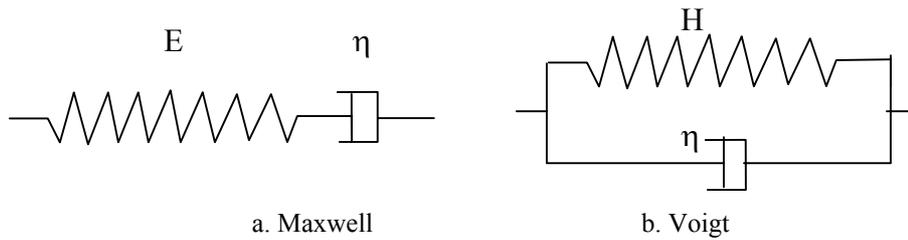


Figure 1.6 : Modèles de Maxwell et Voigt

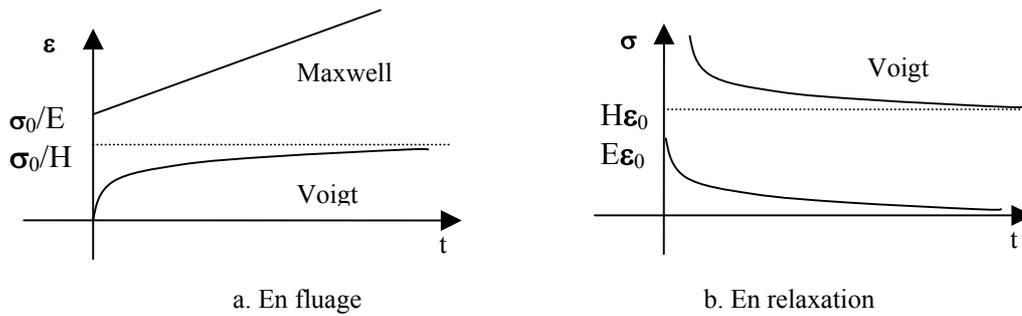


Figure 1.7 : Réponses des modèles de Maxwell et Voigt

La particularité du modèle de Voigt est de ne pas présenter d'élasticité instantanée. Ceci entraîne que sa fonction de relaxation n'est pas continue et n'est pas dérivable. L'application d'un saut de déformation en  $t = 0$  produit une contrainte infinie. Ce modèle n'est donc pas utilisable en relaxation, sauf si la mise en charge est progressive, et sera pour cette raison associé à un ressort pour effectuer des calculs de structure (modèle de Kelvin-Voigt). Sous l'effet d'une contrainte  $\sigma_0$  constante en fonction du temps, la déformation tend vers la valeur asymptotique  $\sigma_0/H$ , le fluage est donc limité (Fig.1.7a), le fluage est donc limité (Fig.1.7a), alors que si, après une mise en charge lente, la déformation est fixée à une valeur  $\epsilon_0$ , la contrainte asymptotique sera  $H\epsilon_0$  (Fig.1.7b). Il n'y a donc pas dans ce dernier cas disparition complète de contrainte. Au contraire, dans le cas du modèle de Maxwell, la vitesse de fluage est constante (Fig.1.7a), et la disparition de contrainte au cours d'une expérience de relaxation est totale (Fig.1.7b).

Dans le cas de modèles et de chargement aussi simples, la réponse est obtenue instantanément par intégration directe des équations différentielles. Les formules obtenues sont respectivement :

- Pour le modèle de Maxwell :
  - Fluage sous une contrainte  $\sigma_0$   $\epsilon = \sigma_0/E + \sigma_0 t/\eta$
  - relaxation à la déformation  $\epsilon_0$   $\sigma = E \epsilon_0 \exp(-t/\tau)$
- Pour le modèle de Voigt :
  - Fluage sous une contrainte  $\sigma_0$   $\epsilon = (\sigma_0/H) [1 - \exp(-t/\tau')]$

Les constantes  $\tau = \eta/E$  et  $\tau' = \eta/H$  sont homogènes à un temps.  $\tau$  désigne le temps de relaxation du modèle de Maxwell. La figure 1.8 illustre le modèle de Maxwell généralisé.

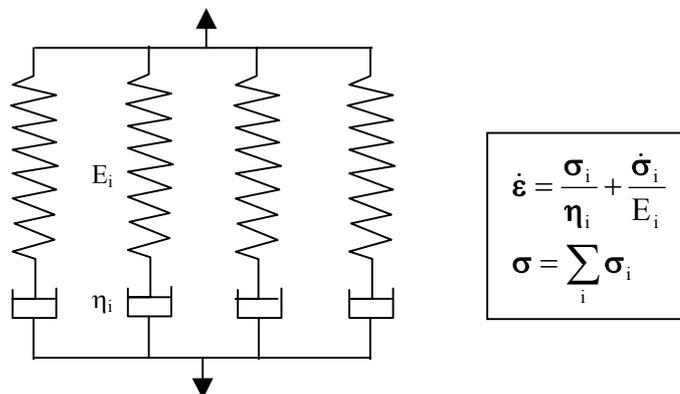


Figure 1.8 : Modèle de Maxwell généralisé

La plasticité est aujourd'hui utilisée pour le calcul de structures de sécurité, qui, quoique généralement conçues pour rester globalement élastiques peuvent présenter:

- des déformations plastiques localisées dans des entailles, fissures, défauts locaux (qui peuvent être bénéfiques en "accommodant" les efforts supplémentaires).
- une plastification accidentelle sous l'effet de chargements extrêmes (séismes), de la perte de certains organes (aubes de turboréacteurs), d'arrêts d'urgence (nucléaire),
- une plastification relativement faible, mais répétée (fatigue oligocyclique), essentiellement en présence de chargements thermomécaniques.

Par ailleurs la (visco-)plasticité peut être une composante essentielle d'un procédé industriel ou du fonctionnement d'un système:

- pour la mise en forme des métaux et polymères,
- pour augmenter la résistance des structures (timbrage, autofrettage, grenailage),
- si on s'intéresse à de très longues durées de fonctionnement (ouvrages souterrains).

Les utilisateurs de méthodes de calculs prenant en compte la plasticité se recrutent essentiellement :

- dans le secteur des transports, aéronautiques (moteurs d'avions, cellules), automobile (culasses, échappement) et dans une moindre mesure, construction navale, chemin de fer,
- dans le secteur de l'énergie, nucléaire (chaudronnerie), chimie, fabrication d'oléoducs, gazoducs, échangeurs de chaleur, turbines,
- en construction mécanique et génie civil, grues, ponts, offshore.

**2.1 Plasticité uniaxiale**

Les chargements uniaxiaux correspondent à un tenseur de contrainte comportant une seule composante non nulle. Certains matériaux, comme les sols ne peuvent pas être chargés de cette manière, néanmoins l'essai de traction, constitue la base de la caractérisation du comportement inélastique. Sous chargement monotone, la courbe obtenue dans le plan déformation-contrainte peut être schématisée de bien des manières, les plus simples étant:

- le comportement **élastique-parfaitement plastique** (Fig.2.1a), qui exprime le fait que le matériau est incapable de supporter une contrainte plus importante que celle qui correspond à l'écoulement plastique,  $\sigma_y$  (yield stress);
- le comportement **élastique-plastique linéaire** (Fig.2.1b), qui est au contraire caractéristique de matériaux capables de se durcir (notion d'écrouissage) avec la déformation plastique; la pente de la courbe déformation-contrainte pour des contraintes supérieures à  $\sigma_y$  s'appelle le **module élastoplastique**,  $E_T = d\sigma/d\varepsilon$ .

Le module élastoplastique est nul pour un matériau élastique-parfaitement plastique, constant pour un matériau élastique-plastique linéaire; il sera dépendant de la déformation dans le cas général.

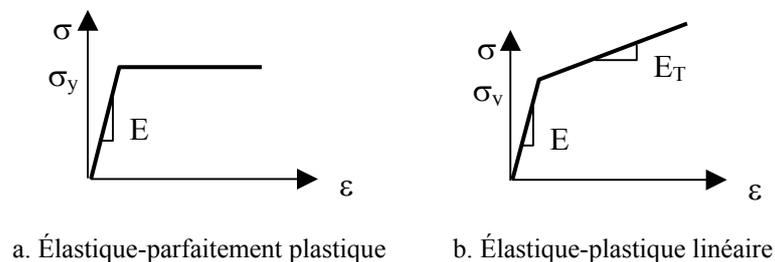


Figure 2.1: Schématisation du comportement plastique monotone

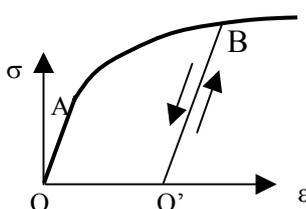


Figure 2.2: Illustration des différents régimes de fonctionnement d'un modèle de plasticité instantanée

La figure 2.2 montre les différents régimes de fonctionnement d'un modèle élastoplastique. Lors de la première mise en charge, entre O et A, le comportement est élastique. La branche AB, supposée parcourue de façon monotone, correspond à un état de **charge plastique**. Si le chargement s'arrête momentanément au point B, rien ne se passe (pas de fluage si la contrainte est maintenue constante, pas de relaxation si la déformation est maintenue constante), ce qui caractérise un comportement non visqueux (**plasticité**

**instantanée**; au contraire du comportement viscoélastique, déjà étudié, et du comportement viscoplastique, qui sera considéré plus loin). A partir de B, la reprise du chargement produit de nouveau de l'écoulement plastique, par contre sa diminution (en termes de contrainte ou de déformation) ramène dans le domaine élastique, il s'agit de l'état de **décharge élastique**, la courbe suivie pour redescendre à contrainte nulle, BO', étant parallèle à la courbe élastique initiale OA. En O' subsiste une déformation permanente, appelée **déformation plastique** et notée  $\epsilon^p$ . Au cours de la descente, la valeur de  $\epsilon^p$  ne change pas, si bien que, si une décharge est appliquée à partir d'un autre point que B, il sera possible d'obtenir une valeur différente de  $\epsilon^p$  pour la même valeur de contrainte: en conséquence, il faudra exprimer les relations sous forme incrémentale.

Cette simple construction illustre bien l'une des principales difficultés de la plasticité - l'expression du modèle en un point de fonctionnement donné (ainsi en B) dépend de la direction de chargement; les opérateurs associés dans le cas général seront dits « multi-branches ». Elle permet en même temps de mettre en évidence les principales hypothèses :

- à température constante, la déformation totale se décompose en une déformation élastique et une déformation plastique (hypothèse de **décomposition de la déformation**):  $\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$
- il existe un domaine d'élasticité, défini par une fonction f, à l'intérieur duquel il n'y a pas d'écoulement plastique, et sur la frontière duquel le point représentant l'état de chargement se déplace au cours de l'écoulement plastique;
- le domaine d'élasticité est susceptible d'évoluer au cours du chargement (phénomène d'écrouissage), cette évolution étant représentée à l'aide de variables d'écrouissage, notées de façon conventionnelle  $A_1$ .

### 2.1.1 Modèle rhéologique patin-ressort

#### Modèle élastique--parfaitement plastique

L'association d'un ressort et d'un patin en série (Fig.2.3a) correspond exactement au comportement élastique-parfaitement plastique déjà décrit en figure 2.1a: le système ne peut pas supporter une contrainte plus grande que  $\sigma_y$ . Lors de la réalisation d'un cycle, **l'énergie dissipée par la déformation plastique** est  $W_p = \int_{\text{cycle}} \sigma d\epsilon$ , soit  $2\sigma_y \epsilon_{\text{max}}^p$ , lorsque la déformation plastique est ramenée à zéro après avoir atteint  $\epsilon_{\text{max}}^p$ , (Fig.2.3c). De même que le modèle de Maxwell en viscoélasticité, ce modèle est susceptible d'atteindre des déformations infinies (ruine du système par déformation excessive).

Pour caractériser ce modèle, il faut considérer une fonction de charge f dépendant de la seule variable  $\sigma$ , et définie par:  $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y$

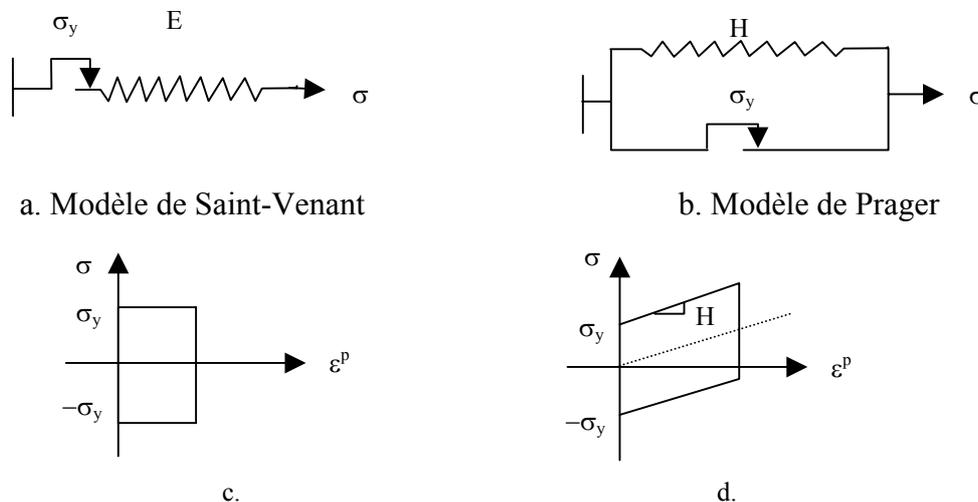


Figure 2.3: Associations en série ou parallèle de patin et ressort

Le domaine d'élasticité correspond aux valeurs négatives de f, et le comportement du système se résume alors aux équations suivantes:

- domaine d'élasticité si :  $f < 0$   $(\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e = \dot{\sigma}/E)$
- décharge élastique si  $f = 0$  et  $\dot{f} < 0$   $(\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e = \dot{\sigma}/E)$
- écoulement plastique si :  $f = 0$  et  $\dot{f} = 0$   $(\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/E + \dot{\epsilon}^p)$

En régime élastique, la vitesse de déformation plastique est bien entendu nulle. La vitesse de déformation élastique devenant à son tour nulle pendant l'écoulement plastique. Ceci implique que l'expression de la vitesse de déformation plastique ne peut pas se faire à l'aide de la contrainte. C'est au contraire la vitesse de déformation qui doit être choisie comme pilote.

### 2.1.2 Modèle de Prager – Ecrouissage cinématique

L'association d'un ressort et d'un patin en parallèle (Fig.2.3b) correspond au comportement illustré en figure 2.1b. Dans ce cas, comme le montre la figure 2.3d, l'écroutissage est linéaire. Il est dit cinématique, car dépendant de la valeur actuelle de la déformation plastique. La forme de la courbe est due au fait que, lors de l'écoulement plastique, la contrainte qui s'établit dans le ressort vaut  $\mathbf{x} = H \boldsymbol{\varepsilon}^p$ . Par ailleurs, cet écoulement ne se produit que si la valeur absolue de la contrainte dans le patin, soit  $|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{x}|$ , est égale à  $\sigma_y$ . Pour une déformation donnée, cette contrainte  $\mathbf{x}$  est une contrainte interne (back stress) qui caractérise le nouvel état neutre du matériau. Il est remarquable de noter que le calcul de l'énergie dissipée au cours d'un cycle produit exactement le même résultat que pour le premier montage, ce qui indique que, pour ce type de comportement, une partie de l'énergie est temporairement stockée dans le matériau (ici, dans le ressort), et restituée à la décharge. Ceci donne une illustration physique de la notion d'écroutissage.

Ce deuxième exemple offre l'occasion d'écrire un modèle plus complet que précédemment. La fonction de charge dépend maintenant de la contrainte appliquée et de la contrainte interne. Elle s'écrit:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}) = |\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{x}| - \sigma_y$$

Il n'y aura présence d'écoulement plastique que si on vérifie à la fois  $f = 0$  et  $\dot{f} = 0$ . Ceci conduit à la condition suivante:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\text{signe}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \text{signe}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} = 0$$

D'où:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}{H}$$

Dans ce cas, la contrainte évolue au cours de l'écoulement plastique, si bien qu'elle peut servir de variable de contrôle. Mais il est aussi toujours possible d'exprimer la vitesse d'écoulement plastique en fonction de la vitesse de déformation totale, en utilisant la décomposition de la déformation combinée avec l'expression de la vitesse de déformation plastique:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{E}{E + H} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Le cas où  $H = 0$  redonne bien entendu le cas du matériau parfaitement plastique.

### 2.1.3 Écriture générale des équations de l'élastoplasticité uniaxiale

Dans le cas général, les conditions de "charge-décharge" s'expriment donc ainsi:

- domaine d'élasticité si :  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}_I) < 0$  ( $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}/E$ )
- décharge élastique si  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}_I) = 0$  et  $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}_I) < 0$  ( $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}/E$ )
- écoulement plastique si :  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}_I) = 0$  et  $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}_I) = 0$  ( $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}/E + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ )

Dans le cas général, le module  $H$  dépend de la déformation et/ou des variables d'écroutissage. La valeur du module plastique au point  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}_I)$  s'obtient en écrivant que le point représentatif du chargement reste sur la limite du domaine d'élasticité au cours de l'écoulement. L'équation qui en découle s'appelle la **condition de cohérence**:  $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}_I) = 0$

Ce formalisme peut paraître un peu lourd dans le cadre d'un chargement uniaxiale, mais il est utile de le mettre en place, car ce sont les mêmes outils qui seront ensuite utilisés dans le cas plus complexe des changements multiaxiaux. Dans les deux exemples qui ont été décrits, le domaine d'élasticité est soit fixe, soit mobile, sa taille étant conservée. Le premier cas ne nécessite bien entendu aucune variable d'écroutissage, le second fait intervenir une variable  $\mathbf{x}$  qui dépend de la valeur actuelle de la déformation plastique. Cette variable deviendra tensorielle dans le cas général. Le type d'écroutissage correspondant s'appelle écroutissage cinématique (Fig.2.4b). Dans le cas particulier illustré par le modèle rhéologique, l'évolution de la variable  $\mathbf{x}$  est linéaire en fonction de la déformation plastique. c'est le modèle d'écroutissage cinématique linéaire (Prager, 1958).

### 2.1.4 Modèle de Taylor – Ecroutissage isotrope

Une autre évolution élémentaire que peut subir le domaine d'élasticité est l'expansion. Cet autre cas (Fig2.4a) correspond à un matériau dont le domaine d'élasticité voit sa taille augmenter, mais qui reste centré sur l'origine (axe OO'), il s'agit d'un écroutissage isotrope (Taylor 1931). La variable d'écroutissage qui intervient dans  $f$  est la dimension du domaine d'élasticité, notée  $R$ :  $f(\boldsymbol{\sigma}, R) = |\boldsymbol{\sigma}| - R - \sigma_y$

L'évolution de cette variable est la même quel que soit le signe de la vitesse de déformation plastique. Elle s'exprimera donc en fonction de la déformation plastique cumulée,  $p$ , variable dont la dérivée est égale à la valeur absolue de la vitesse de la déformation plastique :  $\dot{p} = \left| \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right|$ . Bien entendu, il n'y a pas de différence entre  $p$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  tant que le chargement est monotone croissant. Dans ce cas, vérifier la condition de cohérence revient tout simplement à exprimer que la valeur actuelle de la contrainte est sur la frontière du domaine d'élasticité. Pour l'écroutissage cinématique, cela s'écrit  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{x} + \sigma_y$  et pour l'écroutissage isotrope  $\boldsymbol{\sigma} = R + \sigma_y$ . Cela signifie donc que c'est la loi d'évolution de la variable d'écroutissage qui détermine

exactement la forme de la courbe de traction. Les deux modèles rhéologiques invoqués donnent des courbes linéaires, avec des modules plastiques nul ou constant. Il est souvent plus réaliste de considérer une courbe qui se sature en fonction de la déformation, soit par exemple une fonction puissance (loi de Ramberg-Osgood, avec deux coefficients matériaux K et m) ou une exponentielle, cette dernière formulation offrant l'avantage d'introduire une contrainte ultime  $\sigma_u$ , supportable par le matériau (deux coefficients matériaux,  $\sigma_u$  et  $\gamma$ ) :

$$\sigma = \sigma_y + K(\epsilon^p)^m$$

$$\sigma = \sigma_u + (\sigma_y - \sigma_u) \exp(-\gamma \epsilon^p)$$

Dans bien des cas, les utilisateurs ne prennent pas la peine de définir une forme explicite de la loi de comportement, et décrivent la courbe de traction point par point. Cela revient implicitement à considérer un écrouissage isotrope. Ce type d'écrouissage est prédominant pour les déformations importantes (au delà de 10%). Cependant, l'écrouissage cinématique continue de jouer un rôle important lors de décharges, même pour les grandes déformations, et c'est lui qui est prépondérant pour les faibles déformations et les changements cycliques. Il permet en particulier de simuler correctement l'**effet Bauschinger**, c'est à dire le fait que la contrainte d'élasticité en compression décroît par rapport à la contrainte initiale à la suite d'un préécrouissage en traction. Il est néanmoins moins souvent utilisé que l'écrouissage isotrope, car son traitement numérique est plus délicat.

### 2.2 Viscoplasticité uniaxiale

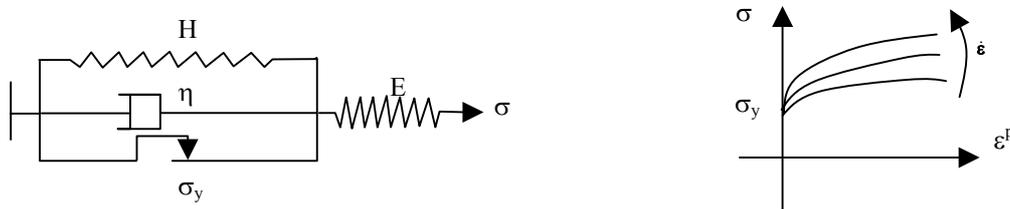


Figure 2.4 : Modèle de Bingham généralisé

La figure 2.4 montre que, en rajoutant un simple amortisseur, on passe d'un modèle plastique instantané à un modèle viscoplastique (modèle de **Bingham** généralisé). En relevant le ressort en série ( $E \rightarrow \infty$ ), on obtient le modèle **rigide-viscoplastique**. Le modèle n'aura pas d'écrouissage si on supprime le ressort en parallèle ( $H=0$ ). La déformation élastique  $\epsilon^e$  se lit aux bornes du ressort E, et la déformation viscoplastique  $\epsilon^{vp}$  aux bornes de l'assemblage en parallèle. La détermination des équations de ce modèle s'effectue en considérant les équations de comportement individuelles de chacun des éléments :

$$\mathbf{x} = H \epsilon^{vp} \quad \sigma_v = \eta \dot{\epsilon}^{vp} \quad \sigma_p \leq \sigma_y$$

où  $\mathbf{x}$ ,  $\sigma_v$  et  $\sigma_p$  sont respectivement les contraintes dans le ressort H, dans l'amortisseur et dans le patin, et :

$$\sigma = \mathbf{x} + \sigma_v + \sigma_p$$

Il y a donc comme pour le modèle plastique un domaine d'élasticité dont la frontière est atteinte lorsque  $|\sigma_p| = \sigma_y$ . On distingue alors trois régimes de fonctionnement, selon que la vitesse de déformation viscoplastique est nulle, positive et négative :

- a)  $\dot{\epsilon}^{vp} = 0$        $|\sigma_p| = |\sigma - H \epsilon^{vp}| \leq \sigma_y$
- b)  $\dot{\epsilon}^{vp} > 0$        $|\sigma_p| = \sigma - H \epsilon^{vp} - \eta \dot{\epsilon}^{vp} = \sigma_y$
- c)  $\dot{\epsilon}^{vp} < 0$        $|\sigma_p| = \sigma - H \epsilon^{vp} - \eta \dot{\epsilon}^{vp} = -\sigma_y$

Le cas (a) correspond à l'intérieur du domaine d'élasticité ( $|\sigma_p| < \sigma_y$ ) ou à un état de décharge élastique ( $|\sigma_p| = \sigma_y$  et  $|\dot{\sigma}_p| \leq 0$ ), les deux autres cas à de l'écoulement ( $|\sigma_p| = \sigma_y$  et  $|\dot{\sigma}_p| = 0$ ). En posant  $\langle x \rangle = \max(x, 0)$ , les trois cas peuvent se résumer par une seule expression :

$$\eta \dot{\epsilon}^{vp} = \langle \sigma - \mathbf{x} - \sigma_y \rangle \text{signe}(\sigma - \mathbf{x}) \quad \text{ou encore :} \quad \dot{\epsilon}^{vp} = \frac{\langle f \rangle}{\eta} \text{signe}(\sigma - \mathbf{x}) \quad \text{avec } f = |\sigma - \mathbf{x}| - \sigma_y$$

La nature du modèle a maintenant complètement changé, puisque le point représentatif de l'état de contrainte courant peut se trouver dans la zone  $f > 0$ , et que la vitesse d'écoulement est maintenant régie par le temps : elle peut être non nulle sans qu'il y ait d'incrément de contrainte ou de déformation. Ceci explique qu'en figure 2.4b la courbe de traction ne soit plus unique (plus la vitesse est grande, plus la contrainte sera élevée, et plus la courbe de traction sera haute), et que, lors d'une décharge, le point de fonctionnement ne pénètre pas immédiatement dans le domaine d'élasticité. On peut donc avoir un écoulement positif à contrainte décroissante. Par ailleurs, il est possible de simuler des expériences de fluage ou de relaxation.

En fluage (Fig.2.5), en supposant qu'on applique un échelon de contrainte (de 0 à  $\sigma_0 > \sigma_y$ ) à partir d'un état de référence où toutes les déformations sont nulles, le modèle prévoit que la déformation viscoplastique est exponentielle en fonction du temps  $t$ , avec un temps caractéristique  $t_f = \eta/H$  :

$$\epsilon^{vp} = \frac{\sigma_0 - \sigma_y}{H} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{t_f}\right) \right)$$

La figure 2.5b montre, dans le plan contrainte-déformation viscoplastique, les évolutions respectives de la contrainte interne  $x$  et du seuil  $\sigma + \sigma_y$ . Lorsque ce dernier rejoint la contrainte appliquée  $\sigma_0$ , la vitesse de déformation viscoplastique s'annule.

En relaxation, la réponse à un échelon de déformation (de 0 à  $\epsilon_0$  tel que  $E \epsilon_0 > \sigma_y$ ) fait cette fois intervenir un temps caractéristique de relaxation  $t_r = \frac{\eta}{E+H}$  :  $\sigma = \sigma_y \frac{E}{E+H} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{t_f}\right) \right) + \frac{E \epsilon_0}{E+H} \left( H + E \exp\left(-\frac{t}{t_r}\right) \right)$

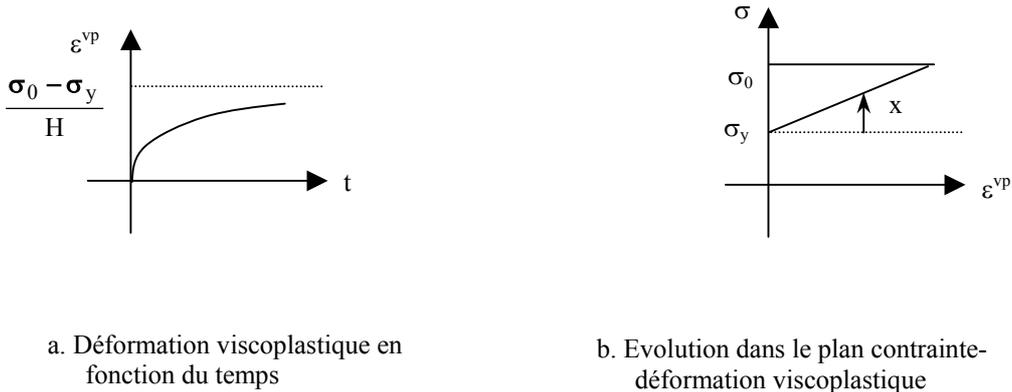


Figure 2.5: Fluage avec le modèle de Bingham

La figure 2.6a montre le trajet parcouru par le point représentatif de l'état de contrainte au cours de la relaxation (pente  $-E$  puisque  $\dot{\epsilon}^{vp} + \dot{\sigma}/E = 0$ ). La figure 2.6b représente quant à elle le trajet caractéristique au cours d'une expérience d'effacement. En fonction du niveau de chargement initial, on peut rencontrer après décharge une vitesse d'écoulement négative (point A) ou nulle (point B), mais en aucun cas on ne pourra ramener la déformation viscoplastique à zéro, sauf dans le cas particulier où la contrainte  $\sigma_y$  est nulle. Il n'y a alors plus de seuil initial, et on conçoit bien qu'il n'est plus nécessaire dans ce cas de définir une décomposition de la déformation: on retrouve d'ailleurs le modèle de Kelvin-Voigt, donc une approche viscoélastique.



Figure 2.6: Fonctionnement du modèle de Bingham à déformation imposée

### 2.3 Quelques modèles classiques en viscoplasticité

Dans l'exemple précédent, la vitesse de déformation viscoplastique est proportionnelle à une certaine contrainte efficace, différence entre la contrainte appliquée et le seuil, qui représente la distance entre le point de fonctionnement actuel et la frontière du domaine d'élasticité, qui n'est rien d'autre que la valeur de la fonction  $f$  au point de fonctionnement courant. La relation linéaire peut être remplacée par une forme plus générale, en introduisant une fonction de viscosité  $\phi$  qui fournit alors en traction simple :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \phi(f)$$

Pour un modèle qui comporterait à la fois de l'érouissage isotrope et cinématique, cette relation s'inverse sous la forme suivante, toujours en traction simple:

$$\sigma = \sigma_y + x + R + \phi^{-1}(\dot{\epsilon}^{vp}) = \sigma_y + x + R + \sigma_v$$

La courbe de traction est déterminée par l'évolution du seuil, exactement comme dans le cas d'un modèle de plasticité (au travers de  $\mathbf{x}$  et  $R$ ), mais également par la fonction de viscosité, qui pilote la valeur de la contrainte visqueuse  $\sigma_v$ . Pour des raisons physiques évidentes, on considère que  $\phi(0) = 0$ , et on suppose également que  $\phi$  est une fonction monotone croissante. Dans le cas où  $\sigma_v$  s'annule, le modèle reproduit un comportement plastique indépendant du temps. Par ailleurs, plus la vitesse de sollicitation augmente, et plus la contrainte atteinte pour une déformation donnée sera élevée.

Dans le cadre d'un modèle viscoplastique, il a donc deux possibilités pour introduire de l'écroutissage. On conserve les possibilités d'action sur des variables de type  $\mathbf{x}$  et  $R$ . et on peut également jouer sur la forme de la contrainte visqueuse. On appelle classiquement modèles à **écrouissage additif** ceux qui jouent sur les variables de type plasticité et modèles à **écrouissage multiplicatif** ceux qui jouent sur la contrainte visqueuse, une approche où les deux mécanismes sont présents étant bien entendu également envisageable. Par ailleurs, contrairement au cas de la plasticité, on peut ici considérer un modèle dans lequel le domaine d'élasticité se réduit à l'origine ( $\sigma = 0$ ), et qui ne possède pas d'écroutissage. Ainsi le modèle le plus courant est-il le modèle de **Norton** (avec deux coefficients matériau  $K$  et  $n$ ) :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \left( \frac{|\sigma|}{K} \right)^n \text{signe}(\sigma)$$

On peut le généraliser pour en faire un modèle à seuil sans écrouissage, ou réintroduire  $\mathbf{x}$  et  $R$  aux côtés de  $\sigma_v$ , ce qui conduit à un modèle à écrouissage additif (**Chaboche**).

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \left\langle \frac{|\sigma - \sigma_y|}{K} \right\rangle^n \text{signe}(\sigma) \quad \text{ou} \quad \dot{\epsilon}^{vp} = \left\langle \frac{|\sigma - x| - R - \sigma_y}{K} \right\rangle^n \text{signe}(\sigma - x)$$

Il. v a également une grande liberté pour choisir d'autres formes que la fonction puissance, ainsi un sinus hyperbolique dans le modèle de **Sellars et Teggart** (loi sans écrouissage, coefficients  $A$  et  $K$ ) :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = A \text{sh} \left( \frac{|\sigma|}{K} \right) \text{signe}(\sigma)$$

Pour obtenir des lois à écrouissage multiplicatif, il faut admettre que la fonction  $\phi$  ne dépend pas uniquement de  $f$ , ainsi la loi de **Lemaitre** (coefficients matériau  $K$ ,  $m$  et  $n$ ) :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \left( \frac{\sigma}{K} \right)^n \left( \epsilon^p \right)^m \text{signe}(\sigma)$$

### 3.1 Critères de plasticité

La description des modèles à utiliser sous chargement uniaxial a mis en évidence un domaine d'élasticité, dans l'espace des contraintes et des variables d'érouissage, pour lequel il n'y a pas d'écoulement plastique ou viscoplastique. La trace de ce domaine sur l'axe de la contrainte se limite à un segment de droite, qui peut subir une translation ou une extension (il peut même parfois se limiter à un point). Par ailleurs certains modèles sont capables de représenter une contrainte maximale supportable par le matériau. Afin de pouvoir aborder l'étude des chargements multiaxiaux, il est nécessaire de se donner les moyens de définir de telles limites en tridimensionnel. Comme dans le chapitre précédent, on se propose d'illustrer la théorie qui va être développée à l'aide d'un modèle rhéologique, constitué d'un assemblage de barres formant un treillis métallique. On passera ensuite en revue les outils disponibles pour écrire ces modèles dans le cas de milieux continus, enfin on montrera les principales classes de critères. De même que pour les lois d'écoulement qui ont été citées précédemment, le choix de tel ou tel critère va dépendre du matériau étudié.

#### 3.1.1 Exemple d'un treillis métallique

Le système de barres articulées illustré en figure 3.1a permet de se représenter à partir d'un exemple simple la signification du domaine d'élasticité et de la charge de ruine pour un milieu continu. Il est constitué de trois barres composées du même matériau, élastique ( $E$ ) parfaitement plastique ( $\sigma_y$ ), de même section  $S$ , et différant simplement par leur longueur. Il s'agit d'un système à deux paramètres de chargement,  $P_1$  et  $P_2$ , mais les résultats sont exprimés (Fig.3.1b) en grandeurs adimensionnelles :

$$F_1 = P_1/(S\sigma_y) ; \quad F_2 = P_2/(S\sigma_y)$$

- Si seule la charge  $P_1$  est non nulle, l'écriture des équations d'équilibre et de l'élasticité permet de montrer que la plastification apparaîtra en premier lieu dans la barre (3), pour une force globale telle que  $F_1 = F_{1e} = 5/4$ . A partir de cette limite, seules les barres (1) et (2) continuent de se charger, jusqu'à atteindre elles-mêmes leur état limite pour  $F_1 = F_{1\infty} = 2$ .
- Dans le cas où seule la charge  $P_2$  est non nulle, la barre (3) ne joue aucun rôle, et les barres (1) et (2) se plastifient en même temps. Il n'y a pas de "recours" après l'apparition de la plasticité, donc le premier écoulement plastique coïncide avec la ruine de la structure selon ce mode de chargement, pour une force telle que :

$$F_2 = F_{2e} = F_{2\infty} = \sqrt{3}$$

- En cas de charges combinées, le domaine d'élasticité dans le plan  $F_1 = F_2$  se construit par superposition (il est illustré en trait fin sur la figure 3.1b), tandis qu'il faut trouver les mécanismes de ruine qui seront actifs pour prévoir la forme du domaine de charge limite (tracé en traits gras sur la figure 3.1b). Les deux segments de droite verticaux correspondent à un mécanisme dans lequel la barre (3) ne joue aucun rôle, et qui entraîne les deux autres barres à l'horizontale; ceux qui sont inclinés sont prévus en supposant qu'une barre latérale (par exemple (2)) reste inactive, et que les deux autres se plastifient.

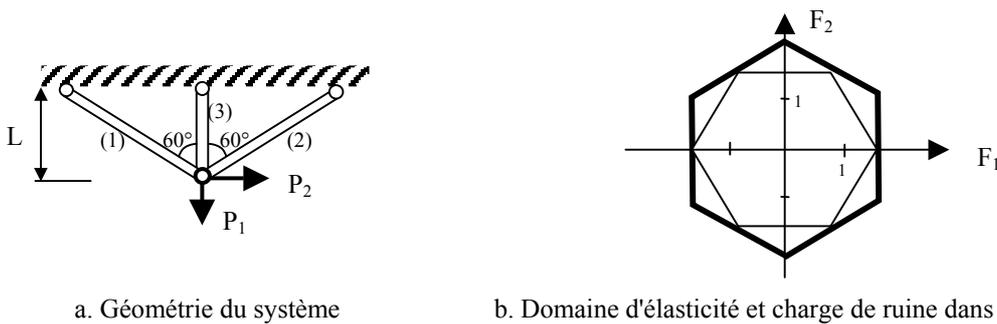


Figure 3.1: Réponse en élasticité et rupture d'un système réticulé

#### 3.1.2 Les outils disponibles

Le cas du chargement uniaxial étudié jusqu'à présent fait apparaître un domaine d'élasticité au travers de deux valeurs de contrainte, l'une en traction, l'autre en compression, pour lesquelles se produit l'écoulement plastique. Ainsi dans le cas du modèle de Prager, le domaine d'élasticité initial est le segment  $[-\sigma_y, \sigma_y]$ , et sa position pour une déformation plastique est  $[-\sigma_y + \mathbf{x}, \sigma_y + \mathbf{x}]$ , avec  $\mathbf{x} = H\epsilon^p$ . Il est décrit par la fonction de charge  $f$  (définie de  $\mathfrak{R}^2$  dans  $\mathfrak{R}$ ). Pour définir ce même domaine en présence de chargements multiaxiaux, la fonction  $f$  devient une fonction du tenseur de contrainte et du tenseur  $\mathbf{x}$  (de  $\mathfrak{R}^{12}$  dans  $\mathfrak{R}$ ) telle que si  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}) < 0$ , l'état de contraintes est élastique, si  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}) = 0$ , le point de fonctionnement est sur la frontière, la condition  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}) > 0$  définissant l'extérieur du domaine. Dans le cas général, l'ensemble de départ contiendra les contraintes et toutes les variables d'érouissage, scalaires ou tensorielles, il faut donc définir  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}_1)$ . On va dans un premier temps limiter la

présentation à la définition du domaine d'élasticité initial, pour lequel on supposera que les variables  $\mathbf{A}_i$  sont nulles, si bien qu'on se contentera d'écrire les restrictions des fonctions  $f$  dans l'espace des contraintes.

L'expérience montre que, pour la plupart des matériaux, le domaine d'élasticité initial est **convexe** (c'est en particulier vrai pour les métaux qui se déforment par glissement cristallographique). La fonction de charge doit donc elle-même être convexe en  $\sigma$ , ce qui implique, pour tout réel  $\lambda$  compris entre 0 et 1, et pour un couple  $(\sigma_1, \sigma_2)$  quelconque de la frontière :

$$f(\lambda\sigma_1 + (1-\lambda)\sigma_2) \leq \lambda f(\sigma_1) + (1-\lambda)f(\sigma_2)$$

Comme dans le cas de l'étude du tenseur d'élasticité, il faut ici encore respecter les symétries matérielles. Ceci implique en particulier dans le cas d'un matériau isotrope que  $f$  soit une fonction symétrique des seules contraintes principales, ou bien encore, ce qui est équivalent, des invariants du tenseur des contraintes dont la définition provient du polynôme caractéristique :

$$I_1 = \text{trace}(\sigma) = \sigma_{ii} \quad I_2 = (1/2) \text{trace}(\sigma)^2 = (1/2) \sigma_{ij} \sigma_{ji} \quad I_3 = (1/3) \text{trace}(\sigma)^3 = (1/3) \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki}$$

Dans les matériaux métalliques on observe généralement l'**incompressibilité plastique** ( $\epsilon_{ii}^p = 0$ ) et **indépendance** du comportement vis-à-vis de la pression hydrostatique. Ceci amène à considérer comme variable critique à faire figurer dans la définition du critère non plus le tenseur de contraintes lui-même, mais son déviateur  $\mathbf{s}$  défini en enlevant à  $\sigma$  la pression hydrostatique ( $\sigma_h$ ) :  $\mathbf{s} = \sigma - (I_1/3) \mathbf{I}$  ;  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_h \delta_{ij}$ . Les invariants de  $\mathbf{s}$  sont :

$$J_1 = \text{trace}(\mathbf{s}) = 0 \quad J_2 = (1/2) \text{trace}(\mathbf{s})^2 = (1/2) s_{ij} s_{ji} \quad J_3 = (1/3) \text{trace}(\mathbf{s})^3 = (1/3) s_{ij} s_{jk} s_{ki}$$

On peut écrire plus explicitement :

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$= \frac{1}{6} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)]$$

Il est commode, en vue de réaliser les comparaisons avec les résultats expérimentaux, de disposer d'expressions des critères dans lesquelles les valeurs de  $f$  sont homogènes à des contraintes, c'est ce qui amène par exemple à utiliser à la place de  $J_2$  l'invariant  $J$  (contrainte équivalente au sens de Von-Mises :  $J = \sigma_{eq} = \sqrt{3J_2}$ ), qui peut également s'exprimer en fonction des contraintes principales, ou de la contrainte  $\sigma$  dans le cas d'un état de traction simple.

La valeur  $J$  est à rapprocher de celle de la contrainte de cisaillement octaédral. Les plans octaédraux sont ceux dont le vecteur normal est de type  $(1,1,1)$ ,  $(-1,1,1)$  et permutation circulaire dans l'espace des contraintes principales. Il est aisé de montrer que le vecteur contrainte évalué sur le plan  $(1,1,1)$  à partir des valeurs de  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  a pour composantes normale et tangentielle :

$$\sigma_{oct} = (1/3)I_1 \quad ; \quad \tau_{oct} = (\sqrt{2}/3)J$$

La valeur de  $J$  définit donc le cisaillement dans les plans octaédraux. Les remarques précédentes indiquent que le plan de normale  $(1,1,1)$  va être un plan privilégié pour la représentation des critères. En effet, tous les points représentant des états de contrainte qui ne diffèrent que par un tenseur sphérique (donc qui sont équivalents vis-à-vis d'un critère qui ne fait pas intervenir la pression hydrostatique) s'y projettent sur le même point. La figure 3.2 montre ce plan, dans lequel les projections des axes principaux des angles de  $2\pi/3$ , et qui a comme équation  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -I_1/3$ .

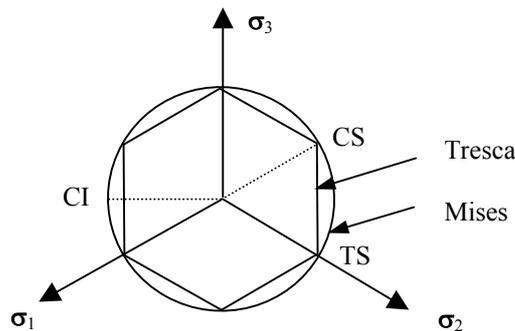


Figure 3.2: Définition du plan déviateur

TS désigne les points qui peuvent se ramener à la traction simple, CS ceux qui peuvent se ramener à la compression simple (par exemple un chargement biaxial, car un état où les seules contraintes non nulles sont  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  est équivalent à  $\sigma_3 = -\sigma$ , CI un état de cisaillement.

### 3.1.3 Critères ne faisant pas intervenir la pression hydrostatique

**Critère de Von Mises :** Dans le critère de von Mises, on considère que le seuil de plasticité est lié à l'énergie élastique de cisaillement. Cela revient à négliger l'influence du troisième invariant. Dans la mesure où la trace du tenseur des contraintes

n'intervient pas, le critère le plus simple est celui qui n'utilise que le second invariant du déviateur des contraintes, ou encore J. Ceci correspond à une sphère dans l'espace des tenseurs s symétriques (expression quadratique des composantes  $s_{ij}$ , qui sont toutes équivalentes), soit, si  $\sigma_y$  est la limite d'élasticité en traction, la fonction de charge est définie par :

$$f(\sigma) = J - \sigma_y$$

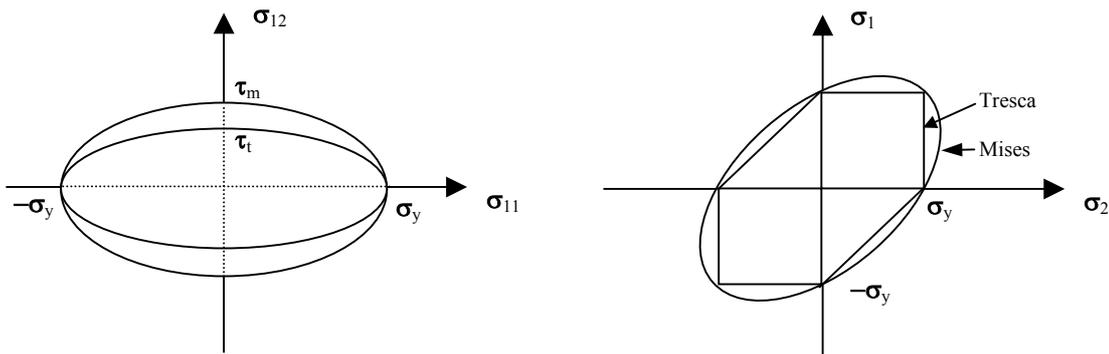
**Critère de Tresca :** Le seuil de plasticité n'est plus lié à l'énergie élastique de cisaillement mais à la contrainte de cisaillement. L'expression du critère de Tresca fait intervenir les cisaillements maximums dans chaque plan principal, représentés par les quantités  $(\sigma_i - \sigma_j)$ . La spécificité du critère de Tresca est de ne retenir que le plus grand d'entre eux. Le fait de rajouter une pression à chaque terme de la diagonale ne modifie pas, comme prévu, la valeur du critère. Contrairement au cas précédent, cette expression ne définit en général pas une surface régulière (discontinuité de la normale, points anguleux):

$$f(\sigma) = \max(\sigma_i - \sigma_j) - \sigma_y$$

**Comparaison des critères de Tresca et von Mises**

Comme il n'est bien entendu pas question de se placer dans l'espace des 6 (ou 9) composantes du tenseur des contraintes, il faut se résoudre à ne visualiser les frontières du domaine d'élasticité que dans des sous-espaces à deux ou trois dimensions. Les représentations les plus courantes s'effectuent:

- dans le plan traction-cisaillement (Fig.3.3a), lorsque seules les composantes  $\sigma = \sigma_{11}$  et  $\tau = \sigma_{12}$  sont non nulles; les expressions des critères se réduisent alors à:
  - von Mises :  $f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{0.5} - \sigma_y$
  - Tresca :  $f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 4\tau^2)^{0.5} - \sigma_y$
- dans le plan des contraintes principales ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) (Fig.3.3b), lorsque la troisième contrainte principale  $\sigma_3$  est nulle:
  - von Mises :  $f(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^{0.5} - \sigma_y$
  - Tresca :  $f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2 - \sigma_y$  si  $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2$   
 $f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_y$  si  $0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$   
 $f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_y$  si  $\sigma_2 \leq 0 \leq \sigma_1$   
 (symétrie par rapport à l'axe  $\sigma_1 = \sigma_2$ )
- dans le plan déviateur (Fig.3.2), le critère de von Mises est représenté par un cercle, ce qui est cohérent avec son interprétation par le cisaillement octaédral, le critère de Tresca par un hexagone;
- dans l'espace des contraintes principales, chacun de ces critères est représenté par un cylindre de génératrice (1,1,1), qui s'appuie sur les courbes définies ci-dessus dans le plan déviateur.



a. En traction-cisaillement (von Mises :  $\tau_m = \sigma_y/\sqrt{3}$  , Tresca:  $\tau_t = \sigma_y/2$ )      b. En traction biaxiale

Figure 3.3: Comparaisons des critères de Tresca et de von Mises

**3.1.4 Critères faisant intervenir la pression hydrostatique**

Ces critères sont nécessaires pour représenter la déformation plastique des matériaux pulvérulents, des sols ou en présence d'endommagement du matériau. Ils expriment le fait qu'une contrainte hydrostatique de compression rend plus difficile la déformation plastique. Une des conséquences de leur formulation est qu'ils introduisent une dissymétrie traction-compression.

**Critère de Drucker-Prager :** C'est une extension du critère de von Mises, combinaison linéaire du deuxième invariant du déviateur et de la trace du tenseur des contraintes. C'est toujours un cercle dans le plan déviateur, mais qui dépend de l'altitude sur la trisectrice des axes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  de contraintes principales (Fig.3.4a):

$$f(\sigma) = J - \frac{\sigma_y - \alpha I_1}{1 - \alpha}$$

La limite d'élasticité en traction reste  $\sigma_y$ , et la limite d'élasticité en compression est  $-\sigma_y/(1-2\alpha)$ . Le coefficient  $\alpha$  dépend du matériau, il est bien entendu compris entre 0 et 0.5, et on retrouve le critère de von Mises pour  $\alpha = 0$  (Fig.3.4b).

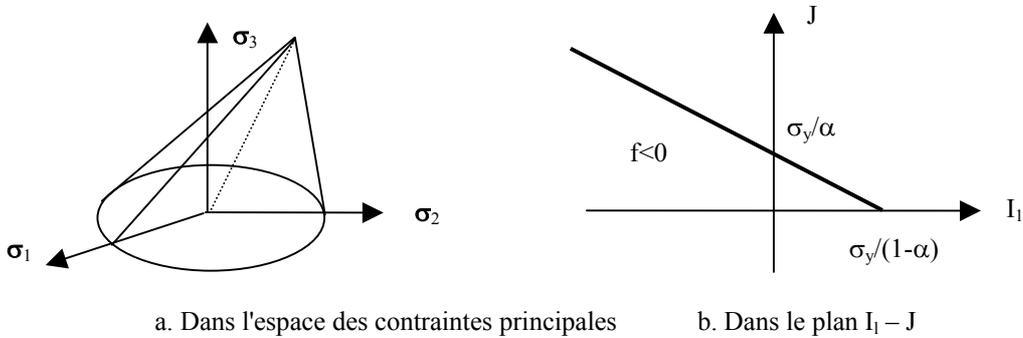


Figure 3.4: Représentation du critère de Drucker-Prager

**Critère de Mohr-Coulomb**

Il est apparenté au critère de Tresca, faisant intervenir comme lui le cisaillement maximum, mais en même temps la contrainte "moyenne", représentée par le centre du cercle de Mohr correspondant au cisaillement maximum, soit:

$$f(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin\phi - 2C \cos\phi$$

(avec  $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$ )

Ce critère est sous-tendu par la notion de frottement, et suppose que le cisaillement maximal que peut subir le matériau ( $T_t$  en figure 3.5a) est d'autant plus grand que la contrainte normale de compression est élevée. La limite admissible constitue une courbe intrinsèque dans le plan de Mohr. La formule énoncée ci-dessus- est obtenue avec une règle de frottement linéaire:

$$|T_t| < -\tan(\phi) T_n + C$$

La constante  $C$  est la cohésion, correspondant à la contrainte de cisaillement qui peut être supportée par le matériau sous contrainte moyenne nulle. L'angle  $\phi$  désigne le frottement interne du matériau. Si  $C$  est nul et  $\phi$  non nul, le matériau est dit pulvérulent. Si  $\phi$  est nul et  $C$  non nul, comme dans le cas du critère de Tresca, le matériau est purement cohérent.

Dans le plan déviateur, on obtient un hexagone irrégulier :  $TS = 2\sqrt{6}(C \cos\phi - p \sin\phi)/(3 + \sin\phi)$ , et  $CS = 2\sqrt{6}(-C \cos\phi - p \sin\phi)/(3 - \sin\phi)$

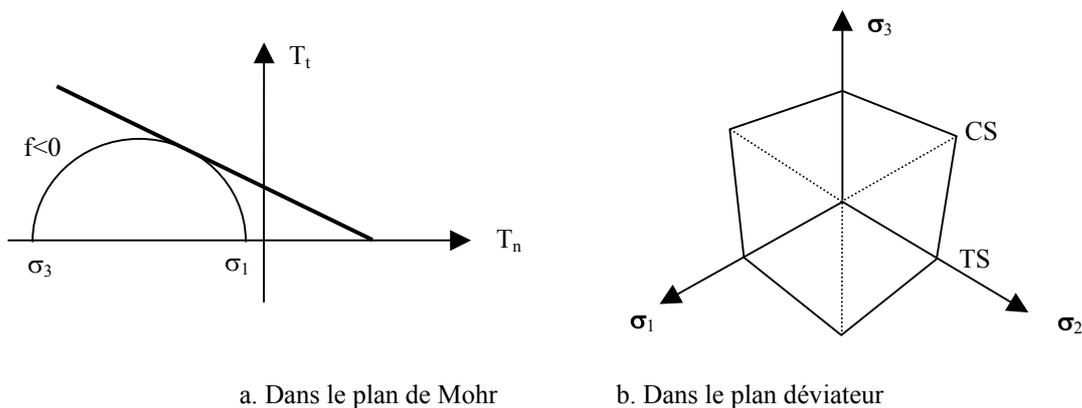


Figure 3.5: Représentation du critère de Mohr-Coulomb

**Critères "fermés"**

Les deux critères précédents prévoient que le matériau devient infiniment résistant en compression triaxiale. Ce comportement n'est en général pas vérifié sur les matériaux réels qui sont sensibles à la pression hydrostatique. Pour permettre de simuler par exemple des opérations de compaction, on a recours à des modèles "fermés", dans lesquels on définit la courbe limite en deux parties, le raccord s'effectuant pour une valeur critique négative de la pression hydrostatique. On retiendra par exemple le *cap model*, qui ferme par une ellipse le critère de Drucker-Prager, ou le modèle de Cam-clay (utilisé pour les argiles), dont la courbe limite est définie par deux ellipses dans le plan ( $I_1 - J$ ).

### 3.1.5 Critères anisotropes

Lorsqu'on mesure expérimentalement la surface de charge sur un matériau métallique, on constate qu'en présence de déformations inélastiques, elle subit une expansion, une translation, et une torsion. Les deux premières modifications sont représentées par les écrouissages isotropes et cinématiques, mais la dernière n'est pas prise en compte par les modèles courants, d'autant que la forme évolue au cours de la déformation sous chargement complexe : on est là en présence d'anisotropie induite. Il existe par ailleurs des matériaux fondamentalement anisotropes par fabrication, matériaux composites à fibres par exemple. Il existe de nombreuses possibilités d'extension des critères isotropes à la description de matériaux anisotropes. Ce sont ceux dont l'expression ne peut se réduire à une fonction des seuls invariants. La méthode généralement utilisée pour faire apparaître de l'anisotropie consiste à faire intervenir un tenseur du quatrième ordre dans l'expression du critère, qui vient multiplier le déviateur, ou directement le tenseur des contraintes. La solution la plus généralement adoptée généralise le critère de von Mises, en utilisant à la place de  $J(\boldsymbol{\sigma})$  l'expression :  $J_B(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{B} : \boldsymbol{\sigma}}$

qui fait intervenir le tenseur du quatrième ordre  $\mathbf{B}$ . Comme pour le cas de l'élasticité, on peut réduire le nombre de composantes libres du tenseur  $\mathbf{B}$  par des considérations de symétrie. Dans le cas de la plasticité isotrope (Mises) on a :

$$B_{ijkl} = (3/2) \delta_{ik} \delta_{jl}$$

Le nombre 3/2 est choisi pour que  $\sigma_y$  soit la limite élastique dans le cas d'une traction simple.

#### Critère de Hill (plasticité orthotrope)

Il correspond à une anisotropie particulière qui conserve trois plans de symétrie dans l'état d'écrouissage du matériau. Les intersections de ces trois plans sont les axes principaux d'anisotropie qui sont pris comme repère  $(O, x_1, x_2, x_3)$ . Dans le cas de la plasticité orthotrope, la fonction de charge s'écrit :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{22})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{23}^2 + 2N\sigma_{31}^2} - 1$$

Les termes non nuls de  $\mathbf{B}$  sont :

$$B_{1111} = H+F, \quad B_{2222} = G+F, \quad B_{3333} = H+G, \quad B_{1122} = B_{2211} = -F, \quad B_{2233} = B_{3322} = -G,$$

$$B_{3311} = B_{1133} = -H, \quad B_{1212} = B_{2121} = 2L, \quad B_{2323} = B_{3232} = 2M, \quad B_{1313} = B_{3131} = 2N.$$

F, G, H, L, M, N sont les six paramètres scalaires qui caractérisent l'état d'écrouissage anisotrope. On peut les déterminer à l'aide de trois expériences de traction simple et trois expériences de cisaillement simple :

---



---

➤ Seuil de traction $\sigma_{y1}$ dans la direction $x_1$	⇒	F + H = $1/\sigma_{y1}^2$
➤ Seuil de traction $\sigma_{y2}$ dans la direction $x_2$	⇒	F + G = $1/\sigma_{y2}^2$
➤ Seuil de traction $\sigma_{y3}$ dans la direction $x_3$	⇒	G + H = $1/\sigma_{y3}^2$
➤ Seuil de cisaillement $\sigma_{y12}$ dans le plan $(O, x_1, x_2)$	⇒	L = $1/2\sigma_{y12}^2$
➤ Seuil de cisaillement $\sigma_{y23}$ dans le plan $(O, x_2, x_3)$	⇒	M = $1/2\sigma_{y23}^2$
➤ Seuil de cisaillement $\sigma_{y31}$ dans le plan $(O, x_3, x_1)$	⇒	N = $1/2\sigma_{y31}^2$

**Critère de Tsai :** Si on veut de plus représenter la dissymétrie entre traction et compression, le critère de Tsai est souvent utilisé, qui consiste à écrire :  $f(\boldsymbol{\sigma}) = \text{Expression\_de\_Hill} + Q(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + P(\sigma_{11} - \sigma_{33})$

## 3.2 Cadre général de la formulation des lois de comportement

La grande diversité des matériaux réels se traduit par l'existence d'une multitude de lois de comportement et en particulier d'une grande variété de critères et de lois d'évolution aussi bien en élastoplasticité qu'en élastoviscoplasticité. Il est illusoire de vouloir établir une liste exhaustive des modèles, d'autant plus que les chercheurs continuent encore à proposer de nouvelles versions. Aussi ce chapitre sera-t-il consacré à une tâche plus modeste qui consiste à présenter le cadre général d'écriture, en illustrant l'exposé par les lois les plus classiques, et en se limitant aux transformations infinitésimales (petits déplacements et petits gradients de déplacements). On résume tout d'abord les concepts généraux qui ont été introduits dans les chapitres précédents. Le chapitre 4 montrera en détail la loi de comportement élastoplastique et décrira le cadre des transformations finies.

### 3.2.1 Décomposition de la déformation

Le tenseur symétrique des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est décomposé en trois parties:

- Une partie élastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  fonction de la variation du tenseur de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  entre l'état actuel et l'état initial (contrainte à l'état de référence,  $\boldsymbol{\sigma}_0$ ; dans un grand nombre d'applications, il s'agit de l'état de contraintes nulles, mais il est par exemple toujours présent en géotechnique). En élasticité linéaire:  $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}^{-1}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0)$

- Une partie de dilatation thermique  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}}$  fonction de la température actuelle  $T$  et de la température à l'état de référence  $T_0$ . Elle s'écrit à l'aide d'un tenseur  $\boldsymbol{\alpha}$ , qui dépend éventuellement de la température, et qui est sphérique dans le cas des matériaux isotropes :  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}} = \boldsymbol{\alpha} (T - T_0)$
- Une partie non élastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{nc}}$ , elle-même décomposée en une partie plastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}$  et une partie viscoplastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}$ , (régies par des lois d'écoulement en élastoplasticité et en élastoviscoplasticité).

D'où:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}$$

Cette dernière décomposition de la partie non élastique des déformations exprime le fait que, durant une transformation du matériau, divers mécanismes peuvent rentrer en jeu conduisant à une dissipation de l'énergie (irréversibilité) et que, dans l'échelle des temps considérée, la viscosité de certains mécanismes peut être négligée (plasticité instantanée  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}$ ) alors que pour les autres le temps réel doit intervenir dans les vitesses (déformations viscoplastiques  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vp}}$ ). On n'a pas cité dans cette énumération les déformations de changement de phase, qui s'ajoutent aux précédentes lorsque le matériau est instable.

### 3.2.2 Critères

Chacun des mécanismes responsables du comportement inélastique est caractérisé par un certain nombre de variables, appelées variables d'écrouissage, caractérisant à l'instant donnée l'état du matériau, et l'influence du chargement thermomécanique passé. Comme indiqué au chapitre précédent, le domaine d'élasticité se définit dans un espace des contraintes et des variables internes. La condition  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}_i) = 0$  définit la frontière du domaine d'élasticité.

### 3.2.3 Lois d'écoulement

Ce sont les règles qui vont permettre de définir la vitesse de déformation plastique ou viscoplastique lorsqu'on n'est en élasticité. L'étude des modèles rhéologiques a montré la nature des équations mise en jeu pour ce qui concerne l'intensité de la vitesse d'écoulement. Celle-ci est liée à la vitesse de contrainte ou de déformation totale pour un matériau plastique, et à l'état actuel de contrainte et des variables internes pour un matériau viscoplastique. Pour généraliser les résultats précédents au cas tridimensionnel, il importe de se préoccuper également de la **direction** de l'écroulement.

### 3.2.4 Lois d'écrouissage

Dans toute transformation réelle l'énergie mécanique fournie au matériau n'est restituée par le matériau qu'en partie (déformation élastique). L'autre partie (loi de conservation de l'énergie) est dissipée sous l'une des formes suivantes :

- Augmentation de la température (chaleur spécifique),
- Changement d'état de certains constituants (chaleur latente),
- Production de chaleur cédée au milieu environnant,
- Modification de la structure interne du matériau (mouvement de dislocations, glissement relatif inter-grains, création de nouvelles fissures,...)

Cette modification (ou réarrangement) de la structure intime du matériau durant une transformation conduit à un nouvel état dans lequel le matériau a les mêmes propriétés donc le même domaine d'élasticité (phase parfaite ou à écrouissage nul) ou à un domaine d'élasticité plus petit (phase adoucissante ou à écrouissage négatif) ou plus grand (phase durcissante ou à écrouissage positif). L'écriture de l'écrouissage est une tâche très complexe, qui dépend étroitement de la classe de matériau étudié. Certains matériaux présentent même des évolutions durcissantes puis adoucissantes au cours d'une sollicitation cyclique par exemple. Le type d'écrouissage peut par ailleurs être modifié par des trajets de chargements complexes ou par le vieillissement du matériau.

Les lois d'écrouissage sont donc les règles qui caractérisent l'évolution des variables d'écrouissage au cours de la déformation inélastique. Ainsi qu'on l'a vu dans le cas uniaxial, les principales classes d'écrouissage sont l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique.

## 3.3 Formulation des lois de comportement viscoplastique

### 3.3.1 Ecriture générale

La généralisation de l'écriture de la vitesse de déformation viscoplastique est immédiate. On conserve la notion de fonction de viscosité  $\phi$ , qui va continuer de porter la valeur de la fonction définissant le domaine d'élasticité  $f$  :  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{vp}} = \phi(\mathbf{f})$

Dans ce cas général, la direction d'écoulement sera notée  $\mathbf{N}$ . On introduit généralement une fonction  $g$ , qui porte sur les mêmes variables que  $f$ , à savoir le tenseur de contraintes et les variables internes  $g(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}_i)$ . On écrit :  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{vp}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{N}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$

Une possibilité, qui constitue un cas particulier important, consiste à utiliser le critère  $f$  pour définir la direction d'écoulement ( $g=f$ ). En introduisant  $\Phi$  la primitive de  $\phi$ , on peut alors écrire :  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{vp}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \phi \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$

Dans un tel modèle, dit **modèle standard**, ou **modèle de viscoplasticité associée**, la direction d'écoulement est fournie par la normale de la surface de charge. La fonction  $\Phi$  constitue un **potentiel viscoplastique**, puisque sa donnée va suffire à caractériser complètement l'écoulement en intensité et direction.

**3.3.2 Exemple : Modèle de Norton généralisé (loi d'Odqvist)**

La généralisation du modèle de Norton en adoptant le critère de von Mises, s'effectue simplement comme critère la fonction  $f$  dépendant des contraintes uniquement  $f = J(\sigma)$ , et comme potentiel la fonction  $\Phi$  suivante :

$$\Phi = \frac{K}{n+1} \left( \frac{J(\sigma)}{K} \right)^{n+1} \quad \text{On obtient alors :} \quad \dot{\epsilon}^{vp} = \left( \frac{J}{K} \right)^n \frac{\partial J}{\partial \sigma}$$

Le premier terme de l'expression précédente donne l'intensité de l'écoulement, il est bien égal à  $(\sigma/K)^n$  pour une sollicitation de traction simple. On remarque que dans ce modèle, la limite d'élasticité est nulle en permanence, et le domaine d'élasticité est réduite en un point. Ce cas serait sans intérêt pour un modèle de plasticité indépendante du temps.

Pour retrouver le modèle de Bingham (loi avec domaine élastique), il suffit de prendre une fonction du second degré :

$$\Phi = \frac{1}{2} \left( \frac{J(\sigma) - \sigma_y}{\eta} \right)^2$$

**3.3.3 De la viscoplasticité à la plasticité**

La figure 3.6a montre la forme du potentiel viscoplastique  $\Phi$ , fonction monotone croissante de  $f$ , telle que  $\Phi(0) = 0$ , qui illustre que l'intensité de l'écoulement dépend de l'altitude du point de fonctionnement courant, et que, la direction du vecteur vitesse de déformation inélastique est normale aux surfaces équipotentielles (Fig.3.7).

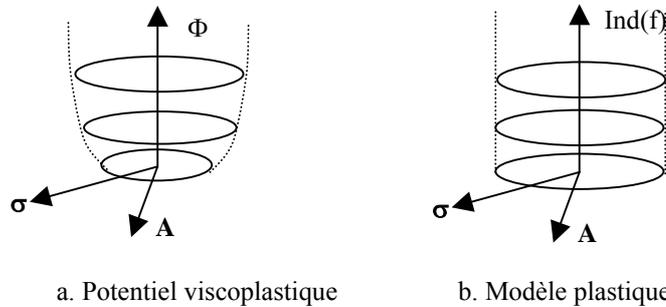


Figure 3.6 : Comparaison des théories de plasticité et de viscoplasticité

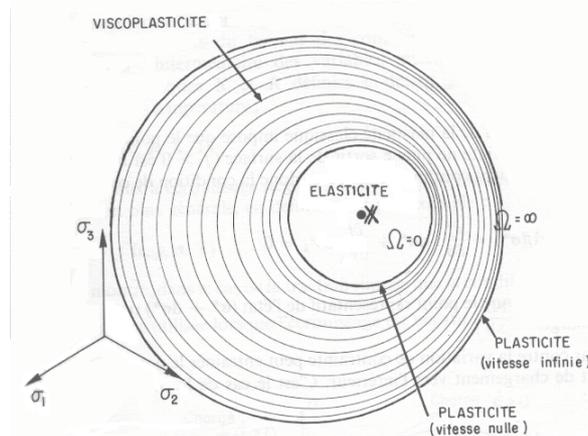


Figure 3.7 : Surfaces équipotentielles de l'écoulement

Lorsque la fonction  $\Phi$  devient de plus en plus non linéaire (par exemple  $n$  tend vers l'infini), la projection des équipotentielles sur l'espace  $(\sigma, A_1)$  se resserrent autour de la surface  $f = 0$ . On définit ainsi une zone de l'espace dans laquelle le potentiel est nul, une autre où il varie très rapidement. A la limite,  $\Phi$  se confond avec la fonction indicatrice du domaine d'élasticité (Fig.3.6b), et on ne peut plus définir l'intensité de l'écoulement par  $\partial\Phi/\partial f$ . On illustre ainsi la différence de nature entre les théories de viscoplasticité et de plasticité. Le cadre viscoplastique autorise, pour écrire un modèle, une grande liberté dans le choix de la fonction de viscosité, alors que dans le cadre de la plasticité (du moins dans le cas de la plasticité associée), l'expression même du domaine d'élasticité détermine l'intensité de l'écoulement. C'est en effet la condition de cohérence  $\dot{f} = 0$  qui va fournir en plasticité l'équation qui disparaît en raison de la singularité de la fonction indicatrice de  $f$  en  $f = 0$ . Le formalisme plastique consiste alors à remplacer  $\partial\Phi/\partial f$  par le multiplicateur plastique  $\lambda$  (**loi de normalité**) :  $\dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}$

Le multiplicateur plastique sera déterminé avec la condition de cohérence. On peut donc également discuter directement le cas du comportement élasto-plastique. C'est ce qui est fait en section suivante.

### 3.4 Formulation des lois de comportement plastique

#### 3.4.1 Formulation générale

La généralisation au cas 3D des équations déjà écrites en plasticité va faire intervenir de nouveau:

- l'hypothèse de décomposition de la déformation;
- la loi d'élasticité,
- les conditions de charge-décharge, qui s'expriment, au travers de la fonction  $f$  (en absence de déformation thermique), par:

$$\circ \text{ domaine d'élasticité si : } f < 0 \quad (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e = \mathbf{D}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}})$$

$$\circ \text{ décharge élastique si } f = 0 \text{ et } \dot{f} < 0 \quad (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e = \mathbf{D}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}})$$

$$\circ \text{ écoulement plastique si : } f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0 \quad (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{D}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)$$

Au cours de l'écoulement, il faut définir l'évolution de la déformation plastique et de l'écrouissage connaissant l'incrément de contrainte, soit :  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \mathbf{H} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad \dot{\mathbf{A}}_I = \mathbf{K} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}$

La construction d'une théorie de plasticité nécessite donc la connaissance de la fonction de charge  $f$ , de la fonction d'écoulement  $\mathbf{H}$ , qui dans le cas général est représentée par un tenseur d'ordre 4, et de la fonction d'écrouissage  $\mathbf{K}$ .

La condition de cohérence  $\dot{f} = 0$  peut s'exprimer en fonction de  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ , car, en posant  $\mathbf{n} = \partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{v} = \partial f / \partial \mathbf{A}_I$ :

$$\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{v} : \dot{\mathbf{A}}_I = (\mathbf{n} + \mathbf{v} \mathbf{K}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0$$

Le cas du chargement neutre correspond pour un matériau écrouissable à la condition d'un incrément de contrainte qui reste sur la surface de charge, soit  $\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0$ . Dans ce cas, la vitesse de déformation plastique et la vitesse d'écrouissage sont également nulles, si bien que:

$$\mathbf{H} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad \mathbf{K} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0$$

Cela montre que  $\mathbf{n}$  peut être « mise en facteur » dans les tenseurs  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{K}$  ( $\mathbf{H} = \mathbf{h} \otimes \mathbf{n}$ ;  $\mathbf{K} = k \mathbf{n}$ ), ce qui permet de réécrire les expressions suivantes:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = (\mathbf{h} \otimes \mathbf{n}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad \dot{\mathbf{A}}_I = k \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

La définition de la théorie de plasticité va donc se réduire à celle du tenseur  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}_I)$ , qui donnera entre autre la direction de l'écoulement, et des fonctions d'écrouissage  $k(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}_I)$ . Ces expressions montrent que la direction de la vitesse de déformation plastique dépend de l'état actuel des contraintes et des variables d'écrouissage (au travers de  $\mathbf{h}$ ), et non de leur vitesse. Par ailleurs, la vitesse de contrainte n'intervient que par sa projection sur la normale  $\mathbf{n}$  au domaine d'élasticité au point de fonctionnement courant (Fig.3.8).

#### 2.4.2 Principe du travail maximal

Enoncé par Hill en 1951, il stipule que : « *Le travail des contraintes réelles  $\boldsymbol{\sigma}$  associées aux vitesses de déformations plastiques réelles  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$  est supérieur au travail de tout autre tenseur de contraintes admissible  $\boldsymbol{\sigma}^*$  (id est ne violant pas la loi de plasticité) associé à  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$*  »

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \geq 0$$

Ce principe peut en fait être démontré dans le cas de métaux qui se déforment par glissement et obéissent à la loi de Schmid. Il n'est pas vérifié par tous les matériaux. en particulier par les sols. Il a des conséquences importantes concernant la direction d'écoulement plastique, la forme de la surface de charge.

#### Règle de normalité

Si on choisit  $\boldsymbol{\sigma}^*$  sur la surface de charge, on vérifie que, si  $\boldsymbol{\sigma}$  est dans le domaine d'élasticité,  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = 0$ . Si le domaine d'élasticité ne présente pas de coins, le principe du travail maximal peut être appliqué à partir d'un point  $\boldsymbol{\sigma}$  de la surface de charge, en choisissant un point  $\boldsymbol{\sigma}^*$  infiniment proche, également sur la surface de charge. Le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}^*$  se déduit de  $\boldsymbol{\sigma}$  à l'aide d'un tenseur  $\mathbf{t}^*$  appartenant au plan tangent à la surface en  $\boldsymbol{\sigma}$  ( $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma} + k \mathbf{t}^*$  avec  $k > 0$ ). Le même raisonnement peut être recommencé en prenant  $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma} - k \mathbf{t}^*$  comme point de départ, ce qui conduit aux deux inégalités suivantes:

$$k \mathbf{t}^* : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \geq 0 \text{ et } -k \mathbf{t}^* : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \geq 0$$

si bien que:

$$\mathbf{t}^* : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = 0$$

**La vitesse de déformation plastique est portée par la normale à la surface de charge.** Le tenseur  $\mathbf{h}$  introduit précédemment est donc colinéaire à  $\mathbf{n}$ . Le scalaire  $\dot{\lambda}$  ou **multiplicateur plastique**, définit l'intensité de l'écoulement. Il est toujours positif, car, en choisissant maintenant  $\boldsymbol{\sigma}^*$  sur la normale au point  $\boldsymbol{\sigma}$ , à l'intérieur du domaine d'élasticité,  $(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) = k\mathbf{n}$  est colinéaire à  $\mathbf{n}$  et de même sens ( $k > 0$ ), si bien que  $(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \geq 0$  devient:

$$k\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \geq 0 \quad \text{d'où: } \dot{\lambda} \geq 0$$

Dans le cas des matériaux qui vérifient le principe du travail maximal, la surface de charge joue en même temps le rôle de pseudo-potential plastique, et détermine l'écoulement plastique à un scalaire multiplicatif près. Si la surface n'est pas régulière et présente un coin au point  $\boldsymbol{\sigma}$ , il y existe un cône des normales, à l'intérieur duquel se trouve la direction de l'incrément de déformation plastique.

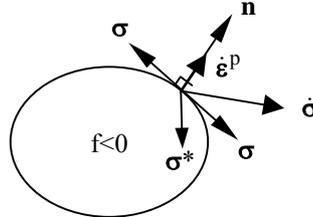


Figure 3.8: Illustration de la règle de normalité et de la convexité de  $f$  (conséquences du principe du travail maximal)

### Convexité de la surface de charge

En appliquant de nouveau le principe du travail maximal à partir d'un état de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  sur la surface de charge, et en considérant  $\boldsymbol{\sigma}^*$  à l'intérieur du domaine d'élasticité, la règle de normalité permet maintenant d'écrire la relation suivante, qui exprime que la surface doit se trouver toute entière du même côté du plan tangent en  $\boldsymbol{\sigma}^*$  (Fig.3.8):

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) : \mathbf{n} \geq 0$$

Le domaine d'élasticité est donc convexe. Il en est de même pour la fonction  $f$ .

### Matériaux standards généralisés

La construction d'une théorie de la plasticité dans le cas général nécessite la définition d'une fonction de charge  $f$ , d'une fonction d'écoulement  $\mathbf{H}$ , et d'une fonction d'écrouissage  $K$ . Dans le cas d'un matériau vérifiant le principe de travail maximal, la direction d'écoulement est en fait fournie par la fonction  $f$ , qui joue un rôle de pseudo-potential. Un matériau sera dit **standard** s'il est possible d'étendre cette notion aux variables d'écrouissage, ce qui conduit à faire dériver de  $f$  l'évolution de ces variable.-., eh introduisant des variables "déformation généralisée"  $\alpha_i$  associées aux flux, ou "contrainte généralisée"  $A_i$ , en posant :

Cette classe de matériaux est intéressante d'un point de vue théorique, car l'existence du potentiel permet de démontrer des théorèmes d'existence et unicité des solutions. L'écriture ci-dessus fournit de façon naturelle la nature des variables d'écrouissage à utiliser pour représenter l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique. En prenant comme exemple le cas du critère de von Mises, la fonction de charge s'écrit, en introduisant le scalaire  $R$  pour modéliser l'écrouissage isotrope et le tenseur  $\mathbf{x}$  pour l'écrouissage cinématique (qui est un tenseur déviatorique) :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}, R) = J(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{x}) - R - \sigma_y = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{x}) : (\mathbf{s} - \mathbf{x})} - R - \sigma_y$$

La variable tensorielle  $\alpha$  associée à la variable d'écrouissage  $\mathbf{x}$  n'est donc pas autre chose que la déformation plastique elle-même, alors que la variable  $p$  associée à la variable d'écrouissage  $R$  s'identifie au multiplicateur plastique :

$$\dot{\alpha} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad \dot{p} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} = \dot{\lambda}$$

La variable  $p$  est appelée **déformation plastique cumulée**, car elle mesure la longueur du trajet de déformation:

$$p = \int_0^t \dot{p}(\tau) d\tau \quad \text{et} \quad \dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\lambda} \mathbf{n} : \dot{\lambda} \mathbf{n}} = \dot{\lambda}$$

Le travail plastique dissipé est :

$$w_p = \int_0^t \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p d\tau$$

Sous chargement uniaxial, lorsque le tenseur de vitesse de déformation plastique est une diagonale  $(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, -0.5 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, -0.5 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)$ , le calcul de  $p$  donne:  $\dot{p} = |\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p|$

### Comportement parfaitement plastique

Dans ce cas, la fonction de charge ne dépend que du tenseur de contrainte. Le domaine d'élasticité est fixe. Au cours de l'écoulement plastique, le point représentatif de l'état de contrainte ne peut que 'tourner' autour du domaine d'élasticité. Le multiplicateur plastique est indéterminé; la condition de charge plastique et la condition de cohérence deviennent respectivement:

$$\begin{aligned} \text{pour } f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \text{ et } \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 & : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \mathbf{n} \\ \text{au cours de l'écoulement} & : \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \end{aligned}$$

### 3.5 Directions d'écoulement associées aux critères courants

Les directions d'écoulement sont calculées dans un premier temps pour un matériau parfaitement plastique. Les modifications apportées par l'écrouissage seront indiquées au paragraphe suivant.

#### 3.5.1 Critère de von Mises

La fonction de charge s'écrit  $f(\boldsymbol{\sigma}) = J(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y$ , si bien que la normale  $\mathbf{n}$  s'exprime :

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial J}{\partial s} : \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{ou :} \quad n_{ij} = \frac{\partial J}{\partial s_{kl}} \frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}}$$

En utilisant :

$$\frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}$$

On obtient :

$$n_{ij} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{J} \quad \text{ou encore :} \quad \mathbf{n} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}}{J}$$

Dans le cas du critère de von Mises, la direction d'écoulement est donnée par le déviateur du tenseur des contraintes.

**Exemple :** traction simple selon la direction 1 :

$$\mathbf{s} = \frac{2\boldsymbol{\sigma}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}; \quad J = |\boldsymbol{\sigma}|; \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \text{signe}(\boldsymbol{\sigma})$$

#### 3.5.2 Critère de Tresca

La loi d'écoulement se définit par secteur dans l'espace des contraintes principales. Par exemple pour le cas  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , la fonction de charge s'écrit :  $f(\boldsymbol{\sigma}) = |\sigma_1 - \sigma_3| - \sigma_y$ , si bien que, pour l'ensemble des états de contrainte qui vérifient cette inégalité, la vitesse de déformation plastique possède les mêmes composantes, le matériau ne se déforme pas selon l'axe 2 (déformation du type cisaillement) :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La définition de la normale pose un problème pour les états de contrainte correspondant aux points singuliers. Par exemple, en traction simple,  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , le critère s'exprime indifféremment  $f(\boldsymbol{\sigma}) = |\sigma_1 - \sigma_3| - \sigma_y$ , ou  $f(\boldsymbol{\sigma}) = |\sigma_1 - \sigma_2| - \sigma_y$ . Il est alors classique de définir deux multiplicateurs plastiques, se référant chacun à une forme du critère.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \dot{\mu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ces deux multiplicateurs sont choisis égaux, le modèle redonne la même forme que le critère de von Mises en traction simple. Par contre, dès que l'état de contrainte s'éloigne de l'égalité stricte entre les composantes  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ , c'est l'un des deux régimes de type cisaillement qui prend le dessus.

#### 3.5.3 Critère de Drucker-Prager

La fonction de charge s'écrit :  $f(\boldsymbol{\sigma}) = J - \frac{\sigma_y - \alpha I_1}{1 - \alpha}$ , si bien que la normale possède une composante sphérique. La déformation plastique évaluée avec un tel critère est accompagnée d'une augmentation de volume quelque soit le chargement appliqué :

$$\mathbf{n} = \frac{3s}{2J} + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \mathbf{I}; \quad \text{trace}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = 3 \frac{\alpha}{1 - \alpha} \dot{\lambda}$$

### 3.6 Quelques lois particulières en plasticité

#### 3.6.1 Lois de Prandtl-Reuss

C'est la loi obtenu en utilisant le critère de Von Mises et une règle d'écoulement isotrope. La fonction de charge est donc :  $f(\boldsymbol{\sigma}, R) = J(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y - R(p)$

L'écoulement isotrope est décrit par la fonction  $R(p)$ , qui peut être définie point par point, par une fonction puissance ou une fonction exponentielle, comme on l'a vu dans le chapitre sur la plasticité uniaxiale. La courbe décrite par  $(\sigma_y + R(p))$  est donc la courbe d'écoulement. Le module plastique peut être évalué comme la pente à cette courbe :  $H = dR/dp$

Quelle soit la forme choisie pour  $R$ , la condition de cohérence permet de trouver le multiplicateur plastique ( $\dot{\lambda} = \dot{p}$ ) :

$$\dot{f} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} = \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{R} = \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{dR}{dp} \dot{p} = \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - H \dot{p} \Rightarrow \dot{\lambda} = \dot{p} = \frac{\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{H}$$

La loi de Prandtl-Reuss permet de déterminer la direction et l'intensité de l'écoulement plastique :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \mathbf{n} = \frac{\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{H} \mathbf{n} \quad \text{avec} \quad \mathbf{n} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}}{J}$$

Dans le cas particulier de traction simple, cette expression générale se réduit bien à la forme uniaxiale habituelle :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \frac{n_{11} \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{H} n_{11} = \frac{\text{signe}(\boldsymbol{\sigma}) \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{H} \text{signe}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}{H} \quad \dot{\lambda} = \dot{p} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p_{11}$$

### 3.6.2 Lois de Prager

C'est la loi obtenu en utilisant le critère de Von Mises et une règle d'écoulement cinématique linéaire. Il faut pour cela introduire une variable d'écoulement  $\mathbf{x}$ , associée à la déformation plastique :  $\mathbf{x} = (2/3)H\boldsymbol{\epsilon}^p$ . Cette variable est déviatorique. La fonction de charge est donc :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}) = J(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{x}) - \sigma_y \quad \text{avec} \quad J(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{x}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{x}) : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{x})}$$

La condition de cohérence s'écrit :

$$\dot{f} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = 0, \quad \text{soit} : \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{n} : \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{n} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{x}}{J}$$

On obtient donc :

$$\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{n} : \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{n} : \frac{2}{3} H \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \mathbf{n} : \frac{2}{3} H \dot{\lambda} \mathbf{n} = H \dot{\lambda}, \quad \text{d'où} : \dot{\lambda} = \frac{\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{H}$$

Le multiplicateur plastique a le même expression formelle que dans le cas de l'écoulement isotrope. Il faut néanmoins noter que la définition de  $\mathbf{n}$  est modifiée, et que  $H$  est constant.

### 3.6.3 Ecoulement à vitesse de déformation totale imposée

Le multiplicateur plastique peut être exprimé également en fonction de la vitesse de déformation totale (en utilisant  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)$ ) :  $\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{n} : \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{H + \mathbf{n} : \mathbf{D} : \mathbf{n}}$

Sous chargement uniaxial, la fonction de charge et la condition de cohérence s'écrivent :  $|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{x}| = \sigma_y, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\mathbf{x}} = H \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$

Il est à noter que le multiplicateur plastique est indéterminé dans le cas d'un matériau élastique-parfaitement plastique ( $H=0$ ) chargé en vitesse de contrainte imposée. Cela est lié au fait que, le module plastique étant nul, il existe une infinité de positions équivalentes en déformation plastique pour un état de contrainte admissible donné. Dans ce cas, on impose la vitesse de déformation totale pour que on puisse déterminer le multiplicateur plastique :  $\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{n} : \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\mathbf{n} : \mathbf{D} : \mathbf{n}}$

## REFERENCES

1. J. Besson, G. Cailletaud, J.L. Chaboche, S. Forest « Mécanique non linéaire des matériaux » Cours IPSI, Paris, 16-19 septembre 1997
2. J. Lemaitre, J.L. Chaboche « Mécanique des matériaux solides » Dunod, 1988
3. D. François, A. Pineau, A. Zaoui « Comportement mécanique des matériaux » Hermès, 1991
4. G. De Saxcé « Mécanique des solides déformables » Cours DEA, Université de Lille I, 1997-1998

## 4.1 INTRODUCTION

La modélisation des procédés de mise en forme des pièces mécaniques est devenue une nécessité dans le contexte industriel actuel. Comme ces procédés sont très complexes, il est difficile, même impossible, de les traiter par des méthodes analytiques. Depuis que Clough [1] a introduit la méthode des éléments finis en 1960, de nombreux problèmes de mécanique et de génie civil ont été résolus par cette méthode. Beaucoup de travaux ont été consacrés à ce domaine. Nous citons en particulier les travaux de Marçal et King [2] qui ont introduit la formulation des éléments finis élastoplastiques en petites déformations, de Hibbitt *et al.* [3], McMeeking et Rice [4] qui ont introduit la formulation du Lagrangien actualisé des éléments finis élastoplastiques en grandes déformations, de Zienkiewicz et Owen [5] qui ont introduit la formulation des éléments finis élasto-viscoplastiques,... Plusieurs travaux de recherches récents, notamment ceux de Golinval [6], El Moutassim [7], Ponthot [8] traitent, entre autres, des problèmes de structures et de mise en forme de métaux en prenant en compte des comportements élastoplastiques ou élasto-viscoplastiques dans le contexte des petites déformations ou des grandes déformations.

En général, la formulation élastoplastique donne des résultats plus précis que dans le cas de la formulation rigide-plastique pour traiter les procédés de mise en forme des métaux. De plus, la formulation élastoplastique permet de traiter le problème de décharge et de calculer les contraintes résiduelles et les déformations résiduelles. Mais cette formulation conduit à des calculs complexes, et à des difficultés numériques. Compte tenu de la dépendance vis à vis de l'histoire du chargement, elle requiert un algorithme pas-à-pas. Sur chaque pas de chargement et pour chaque point d'intégration, il faut effectuer un calcul élastique et tester le critère d'écoulement plastique. Afin de garantir une bonne précision, on souhaite avoir le minimum de points d'intégration qui se plastifient dans un pas. Par conséquent, il faut utiliser des pas assez petits.

Les lois de comportement le plus souvent utilisées pour la modélisation des solides en grandes déformations, sont des lois différentielles qui relie le taux de contraintes au taux de déformations. Ces lois doivent satisfaire le principe de l'objectivité au cours de leur intégration. Nagtegaal *et al.* [9,10], Hughes et Winget [11] ont proposé des schémas d'intégration des lois de comportement en grandes déformations qui respectent l'*objectivité incrémentale* au cours de pas de temps finis.

Les techniques d'intégration des lois constitutives ont vu la croissance et l'utilisation progressive, de manière quasi-unanime, de la technique de *retour radial* mise au point en 1964, dans le cadre de la théorie des petites déformations par Wilkins [12] et réhabilitée, à partir de 1977, par Krieg et Krieg [13]. De plus, dans ce domaine, le concept de *linéarisation consistante* introduit par Nagtegaal [9] et étendu par Simo et Taylor [14] a permis d'écrire, dans le cadre de la théorie des petites et des grandes déformations, des matrices de raideur tangente réellement efficaces.

Ce chapitre est consacré à la modélisation numérique de problèmes dans le cadre de la mécanique des solides en petites et grandes déformations élastoplastiques. C'est un problème assez difficile qui comporte encore à ce jour des difficultés non résolues dans la littérature concernant les aspects théorique et numérique. Il sera important de développer un logiciel avec un environnement informatique souple qui permet de :

- dissocier clairement les non-linéarités géométriques, les non-linéarités matérielles, les non-linéarités du contact avec frottement [29],
- modifier aisément les lois de comportement, les dérivées objectives, les approximations cinématiques, les schémas d'intégration de la loi de comportement.

## 4.2 MODELES DE PETITES DEFORMATIONS ELASTOPLASTIQUES

### 4.2.1 Petites déformations élastoplastiques

A basse température, ou lorsque les vitesses de sollicitations sont relativement faibles, les matériaux métalliques présentent des déformations anélastiques indépendantes du temps, on parle alors de plasticité. Un très grand nombre de modèles existent actuellement qui se basent sur les mêmes principes et diffèrent seulement sur l'écriture de l'écrouissage. On sait par ailleurs que la loi de comportement élastoplastique des grandes déformations dépend fortement de celle des petites déformations. Il est donc bien utile de rappeler les différents principes qui régissent la plasticité dans le cas des petites déformations :

- **Décomposition de la déformation totale**

La déformation totale est formée de deux composantes : une élastique, reliée linéairement ou non au tenseur des contraintes, et l'autre anélastique, indépendante de la vitesse des sollicitations :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (2)$$

où le symbole « : » désigne le produit contracté sur deux indices :

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} (\epsilon_e)_{kl}$$

la somme est effectuée sur les indices répétés.

$D$  désigne la matrice d'élasticité dans le cas de l'élasticité linéaire.

$\sigma$  désigne le tenseur d'ordre 2 des contraintes.

$\epsilon$  désigne le tenseur d'ordre 2 des déformations totales.

$\epsilon_e$  désigne le tenseur d'ordre 2 des déformations élastiques.

$\epsilon_p$  désigne le tenseur d'ordre 2 des déformations plastiques.

#### • Surface de charge

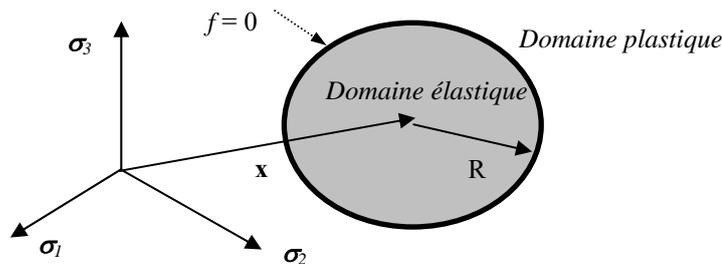
On suppose qu'il existe un domaine convexe dans l'espace des contraintes à l'intérieur duquel il n'y a pas d'écoulement plastique. L'existence de ce domaine est bien établie ; de plus, si on applique une décharge lors d'un écoulement plastique, on constate que le comportement devient élastique ; ce qui suggère que la contrainte se trouve constamment sur la surface de charge. Les conditions de l'écoulement plastique peuvent être résumées par les équations suivantes :

$$\text{Elasticité si } f(\sigma) < 0 \quad \text{ou} \quad f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \sigma < 0 \quad (3)$$

$$\text{Plasticité si } f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \sigma > 0 \quad (4)$$

où  $f$  est la fonction de charge et  $f=0$  représente la surface de charge délimitant le domaine élastique.

Dans un cas général la surface de charge est représentée par un ellipsoïde dans l'espace des contraintes (Figure 4.1).



**Figure 4.1 : Surface de charge en plasticité**

où  $R$  et  $x$  représentent respectivement le rayon et le centre du domaine élastique.

Dans le cas de la plasticité isotrope, on utilise de préférence le critère de Mises qui s'écrit :

$$f(\sigma, x, R) = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{x}) : (\mathbf{s} - \mathbf{x})} - R = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} - R \leq 0 \quad (5)$$

$$\text{ou bien } g = \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}^T P \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{3}R^2 \leq 0 \quad (6)$$

où  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{s} - \mathbf{x}$  avec  $s$  déviateur du tenseur des contraintes défini par :

$$\mathbf{s}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}tr(\sigma)\delta_{ij} \quad (7)$$

La matrice  $P$  dans l'équation (6) est définie par :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

#### • Loi de normalité

L'écoulement plastique peut être régi par une ou plusieurs surfaces, on se limite ici à la présentation du cas de la plasticité associée : une seule surface décrit à la fois le domaine élastique et l'écoulement plastique. Le principe de normalité, selon lequel la vitesse de déformation plastique lors d'un écoulement est normale à la surface de charge, est généralement admis pour un grand nombre de matériaux, métalliques, notamment. Il s'écrit dans le cas de la plasticité associée :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \mathbf{n} \quad (8)$$

Si on note  $J_2(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}$  le second invariant du tenseur  $\boldsymbol{\eta}$  et  $J(\boldsymbol{\eta}) = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\eta})}$  la contrainte équivalente au sens de Von-Mises on a :

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\eta}}{J(\boldsymbol{\eta})} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \quad (9)$$

La loi de normalité s'exprime alors sous la forme :  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \boldsymbol{\eta}$  (10)

où  $\dot{\lambda} = \frac{3}{2J(\boldsymbol{\eta})} \dot{\lambda}$  est le multiplicateur plastique.

#### • Ecroissance

On peut désigner par le terme d'écrouissage, l'évolution de la surface de charge au cours de l'écoulement plastique. Dans la plupart des modèles, cette évolution peut se présenter sous trois formes :

- Gonflement de la surface (écrouissage isotrope)
- Translation de la surface (écrouissage cinématique)
- Gonflement et translation de la surface (écrouissage mixte : isotrope + cinématique)

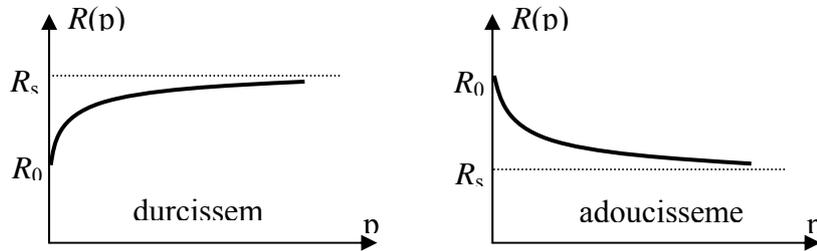
Le gonflement de la surface de charge peut être traduit par l'évolution du rayon  $R$ , auquel on associe, comme variable d'écrouissage, la déformation plastique cumulée  $p$  qui est définie par :

$$p(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p} d\tau \quad (11)$$

On choisit ici pour  $R(p)$  une fonction exponentielle de la forme :

$$R(p) = R_s - (R_s - R_0) e^{-\gamma p} \quad (12)$$

où  $R_s$ ,  $R_0$  et  $\gamma$  sont des coefficients caractéristiques du matériau éventuellement fonction de la température.  $R_s$  représente le rayon saturé et  $R_0$  le rayon initial (Figure 4.2). On notera que si  $R_s > R_0$ , le matériau durcit au cours d'un écoulement plastique ; par contre si  $R_s < R_0$ , l'écoulement engendre un adoucissement du matériau.



**Figure 4.2 :** Evolution de rayon du domaine élastique

La loi d'écrouissage cinématique est définie par l'évolution du centre  $\mathbf{x}$  du domaine élastique. Elle lie la position du centre à la vitesse de déformation plastique de façon linéaire (écrouissage cinématique linéaire type Prager) :

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{2}{3} H \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \frac{2}{3} H \dot{\lambda} \boldsymbol{\eta} \quad (13)$$

où  $H$  est la pente de l'écrouissage cinématique linéaire.

Dans le cas de l'écrouissage cinématique non linéaire, on introduit une variable interne  $\mathbf{c}$  qui est liée au centre  $\mathbf{x}$  du domaine élastique de façon linéaire d'après :

$$\mathbf{x} = \frac{2}{3} h a \mathbf{c} \quad (14)$$

où  $h$  et  $a$  sont des coefficients du matériau dépendant éventuellement de la température. L'évolution de la variable interne s'écrit dans le cas non linéaire :

$$\dot{\mathbf{c}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - h \mathbf{c} \dot{p} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - \frac{3}{2a} \mathbf{x} \dot{p} \quad (15)$$

Le premier terme correspond à l'écrouissage cinématique linéaire type Prager ; le second, introduit par Armstrong-Frederick [15] et Chaboche [16], constitue la partie non linéaire de l'écrouissage cinématique. Pour  $a \rightarrow \infty$ , on retrouve l'écrouissage

cinématique linéaire. Une nouvelle méthode d'intégration numérique de la loi d'écoulement cinématique non linéaire a été proposée par De Saxcé *et al.* [17,18].

#### 4.2.2 Calcul du multiplicateur plastique théorique

Le multiplicateur plastique est calculé à l'aide de la condition de consistance dont l'écriture dépend de l'écoulement :

$$\dot{g} = \boldsymbol{\eta}^T P \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{2}{3} \dot{R} R = 0 \quad (16)$$

où 
$$\dot{R} = R' \dot{p}; \quad R' = \frac{dR}{dp} \quad (17)$$

et 
$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^T P \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p} = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\eta}^T P \boldsymbol{\eta}} \quad (18)$$

Au cours de l'écoulement plastique, on a :

$$g = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T P \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{3} R^2 = 0 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}^T P \boldsymbol{\eta}} \quad (19)$$

Donc 
$$\boldsymbol{\eta}^T P \dot{\boldsymbol{\eta}} = \frac{2}{3} R' \boldsymbol{\eta}^T P \boldsymbol{\eta} \dot{\lambda} \quad (20)$$

Il faut déterminer  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ . On utilise alors les décompositions déviatrices/sphériques des tenseurs de contraintes et de déformations :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = \dot{\sigma}_h \boldsymbol{\delta}_{ij} + \dot{\mathbf{s}}_{ij}; \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} = \dot{\theta} \boldsymbol{\delta}_{ij} + \dot{\mathbf{e}}_{ij} \quad (21)$$

avec 
$$\sigma_h = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad \text{et} \quad \theta = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_e)$$

Loi de Hooke 
$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = \frac{3\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \dot{\theta} \boldsymbol{\delta}_{ij} + \frac{E}{1+\nu} (\dot{\mathbf{e}}_{ij} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p) \quad (22)$$

d'où 
$$\sigma_h = \frac{E}{1-2\nu} \theta = K \theta; \quad \mathbf{s} = \frac{E}{1+\nu} (\mathbf{e} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) = G(\mathbf{e} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \quad (23)$$

avec  $K = \frac{E}{1-2\nu}$  : module de compressibilité ;  $G = \frac{E}{1+\nu}$  : module de cisaillement

En utilisant les équations (10), (13) et (23), on obtient :

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \dot{\mathbf{s}} - \dot{\mathbf{x}} = G(\dot{\mathbf{e}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) - \frac{2}{3} H \dot{\lambda} \boldsymbol{\eta} = G(\dot{\mathbf{e}} - \dot{\lambda} \boldsymbol{\eta}) - \frac{2}{3} H \dot{\lambda} \boldsymbol{\eta} = G \dot{\mathbf{e}} - \left( G + \frac{2}{3} H \right) \dot{\lambda} \boldsymbol{\eta} \quad (24)$$

En introduisant (24) dans (20) on obtient l'expression théorique du multiplicateur plastique :

$$\dot{\lambda} = \frac{G \boldsymbol{\eta}^T P \dot{\mathbf{e}}}{\left( G + \frac{2}{3} (H + R') \right) \Phi^2} \quad \text{avec} \quad \Phi = \sqrt{\boldsymbol{\eta}^T P \boldsymbol{\eta}} \quad (25)$$

#### 4.2.3 Calcul de la matrice tangente théorique

Le calcul de la matrice tangente revient à trouver la relation liant  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  à  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Il convient tout d'abord d'établir la relation :

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{A} \dot{\mathbf{e}}.$$

D'après les équations (23) et (25), on a : 
$$\dot{\mathbf{s}} = G(\dot{\mathbf{e}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = G(\dot{\mathbf{e}} - \dot{\lambda} \boldsymbol{\eta}) = G \left( \dot{\mathbf{e}} - \frac{G \boldsymbol{\eta}^T P \dot{\mathbf{e}} \boldsymbol{\eta}}{\left( G + \frac{2}{3} (H + R') \right) \Phi^2} \right) \quad (26)$$

d'où

$$\dot{s} = G \left[ \mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{\eta} P \boldsymbol{\eta}^T}{\left(1 + \frac{2(H+R')}{3G}\right) \Phi^2} \right] \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A} \dot{\mathbf{e}} \quad (27)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{s} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{11} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{22} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{33} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{11} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{22} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{33} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{11} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{22} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{s} + \frac{1}{3} \mathbf{U} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

De même

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{3} \mathbf{U} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (29)$$

Introduisant (27) et (29) dans (28) on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \dot{s} + \frac{1}{3} \mathbf{U} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{s} + \frac{K}{3} \mathbf{U} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A} \dot{\mathbf{e}} + \frac{K}{3} \mathbf{U} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= \mathbf{A} \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{3} \mathbf{U} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) + \frac{K}{3} \mathbf{U} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left( \mathbf{A} - \frac{1}{3} \mathbf{A} \mathbf{U} + \frac{K}{3} \mathbf{U} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{U} = G \left[ \mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{\eta} P \boldsymbol{\eta}^T}{\left(1 + \frac{2(H+R')}{3G}\right) \Phi^2} \right] \mathbf{U} = G \mathbf{U} - \frac{G \boldsymbol{\eta} P \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{U}}{\left(1 + \frac{2(H+R')}{3G}\right) \Phi^2} = G \mathbf{U} \quad (31)$$

Remarque :  $\boldsymbol{\eta} P \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{U} = 0$  car  $\boldsymbol{\eta} P \boldsymbol{\eta}^T$  est un tenseur déviateur.

En remplaçant  $\mathbf{A} \mathbf{U}$  par  $G \mathbf{U}$  dans (30), on obtient finalement :  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left( \mathbf{A} + \frac{K-G}{3} \mathbf{U} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}_{ep} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  (32)

La matrice tangente théorique est donc définie par :  $\mathbf{D}_{ep} = \left( \mathbf{A} + \frac{K-G}{3} \mathbf{U} \right)$  (33)

#### 4.2.4 Intégration des lois de comportement

L'intégration des lois de comportement joue un rôle très important dans un code de calcul par éléments finis. En effet, elle détermine la précision des résultats. Des erreurs sur les estimations des variables une fois commises ne sont plus rattrapables, de plus lorsque les estimations dépendent de l'histoire du chargement ces erreurs peuvent se propager d'un incrément à un autre, donnant des résultats qui s'écartent de plus en plus de la solution ; d'où l'importance d'utiliser des méthodes d'intégration stables et précises. Dans cette étude, on choisit l'algorithme d'intégration du type implicite.

On suppose que l'on dispose des contraintes et des variables internes à l'instant  $t$  (correspond au pas numéro  $n$ ); intégrer la loi de comportement revient, à partir de l'incrément des déplacements nodaux  $\Delta \mathbf{u}$  estimé entre l'instant  $t$  et  $t+\Delta t$ , à calculer les contraintes et les variables internes à l'instant  $t+\Delta t$  (correspond au pas numéro  $n+1$ ) vérifiant la loi de comportement.

Considérons un état plastiquement admissible (pas numéro  $n$ ) en un point de la structure étudiée. Les caractéristiques de l'état sont :  $\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \mathbf{x}_n, p_n$ ;  $g(\boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{x}_n, p_n) = 0$

A partir de  $\Delta \mathbf{u}$  on peut calculer l'incrément des déformation :  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p$  (34)

où  $\mathbf{B}$  est un opérateur dérivée de fonctions de forme.

Le but est de calculer :  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p, \mathbf{x}_{n+1}, p_{n+1}$  vérifiant :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (35)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta \lambda \boldsymbol{\eta}_{n+1} \quad (36)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{2}{3} H \Delta \lambda \boldsymbol{\eta}_{n+1} \quad (37)$$

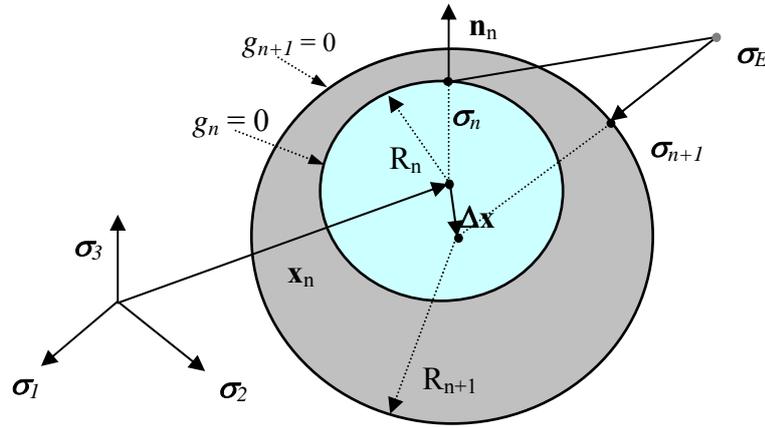
$$p_{n+1} = p_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Phi_{n+1} \Delta\lambda; \quad \Phi_{n+1} = \sqrt{\boldsymbol{\eta}_{n+1}^T P \boldsymbol{\eta}_{n+1}} \quad (38)$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = G(\mathbf{e}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \quad (39)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \quad (40)$$

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1} \quad (41)$$

La méthode la plus couramment utilisée pour intégrer les lois de comportement plastique est sans doute la méthode dite 'Prévision Elastique Retour Radial' (PERR), initialement introduite par Wilkins [12], Krieg et Krieg [13] pour des modèles de comportement parfaitement plastique. La notion d'opérateur tangent consistant a été introduite par Nagtegaal [9]. L'extension de cette méthode au cas des modèles avec écrouissage cinématique non linéaire a été réalisée par Simo et Taylor [19]. Le principe de cette méthode consiste à calculer la contrainte finale comme projection d'une contrainte d'essai sur la surface de charge finale selon la normale passant par la contrainte d'essai (Figure 4.3).



**Figure 4.3** : Projection de la contrainte sur la surface de charge

La contrainte d'essai est calculée en supposant que l'incrément de déformation soit entièrement élastique :

$$\boldsymbol{\sigma}_E = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta\boldsymbol{\sigma}_E = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{D} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (42)$$

Les relations (35) à (41) sont facilement réalisées dès que l'on a obtenu le multiplicateur plastique  $\Delta\lambda$  défini par la condition de consistance à la fin du pas :

$$g(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{x}_{n+1}, p_{n+1}) = 0 \quad (43)$$

Remplaçant les relations (35) à (41), l'équation (43) devient une relation non linéaire en  $\Delta\lambda$  à vérifier :

$$g(\Delta\lambda) = 0 \quad (44)$$

#### 4.2.4.1 calcul de $\Delta\lambda$

Reprenons l'expression (43) et (38)

$$g = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1}^T P \boldsymbol{\eta}_{n+1} - \frac{1}{3} R^2 (p_{n+1}) = 0 \quad (45)$$

$$p_{n+1} = p_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Phi_{n+1} \Delta\lambda; \quad \Phi_{n+1} = \sqrt{\boldsymbol{\eta}_{n+1}^T P \boldsymbol{\eta}_{n+1}}$$

Il suffit donc de calculer  $\boldsymbol{\eta}_{n+1}$  en fonction de  $\Delta\lambda$  et de grandeurs connues.

- Calcul de  $\boldsymbol{\eta}_{n+1}$

En utilisant les relations (36), (39) et (41), on a :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1} = G(\mathbf{e}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) - \mathbf{x}_n - \frac{2}{3} H \Delta\lambda \boldsymbol{\eta}_{n+1} \\
&= G(\mathbf{e}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p - \Delta\lambda \boldsymbol{\eta}_{n+1}) - \mathbf{x}_n - \frac{2}{3} H \Delta\lambda \boldsymbol{\eta}_{n+1} \\
&= G(\mathbf{e}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - \mathbf{x}_n - \left(G + \frac{2}{3} H\right) \Delta\lambda \boldsymbol{\eta}_{n+1}
\end{aligned}$$

Posant

$$\boldsymbol{\eta}_E = G(\mathbf{e}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - \mathbf{x}_n \quad (\text{connu})$$

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1} = \boldsymbol{\eta}_E - \left(G + \frac{2}{3} H\right) \Delta\lambda \boldsymbol{\eta}_{n+1}$$

d'où

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1} = \frac{\boldsymbol{\eta}_E}{1 + \left(G + \frac{2}{3} H\right) \Delta\lambda} \quad (46)$$

Introduisant (46) dans (45) on obtient :

$$g(\Delta\lambda) = \frac{\boldsymbol{\eta}_E^T P \boldsymbol{\eta}_E}{2 \left(1 + \left(G + \frac{2}{3} H\right) \Delta\lambda\right)^2} - \frac{1}{3} R^2(p_{n+1}) = 0 \quad (47)$$

où

$$p_{n+1} = p_n + \sqrt{\frac{2 \boldsymbol{\eta}_E^T P \boldsymbol{\eta}_E}{3 \left(1 + \left(G + \frac{2}{3} H\right) \Delta\lambda\right)^2}} \Delta\lambda$$

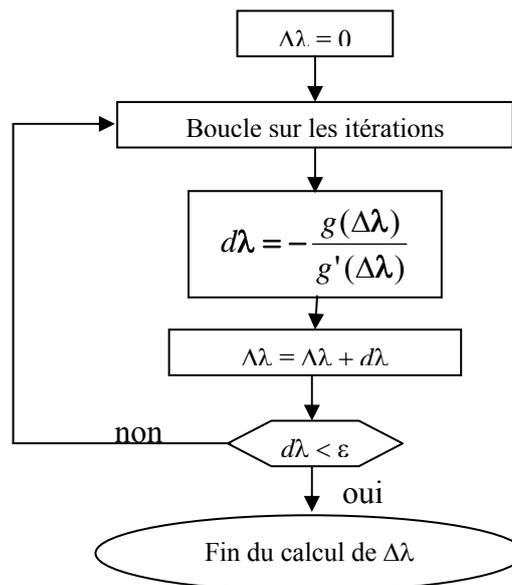
Posant

$$\Psi(\Delta\lambda) = \frac{\boldsymbol{\eta}_E^T P \boldsymbol{\eta}_E}{\left(1 + \left(G + \frac{2}{3} H\right) \Delta\lambda\right)^2}$$

La relation (47) devient :

$$g(\Delta\lambda) = \frac{1}{2} \Psi(\Delta\lambda) - \frac{1}{3} R^2 \left( p_n + \sqrt{\frac{2}{3} \Psi(\Delta\lambda)} \Delta\lambda \right) = 0 \quad (48)$$

a résolution de cette équation non linéaire en  $\Delta\lambda$  est faite par l'intermédiaire de la méthode de Newton-Raphson qui suit le schéma suivant (Figure 4.4) :



**Figure 4.4** : Méthode de Newton-Raphson pour le calcul de  $\Delta\lambda$

avec :

$$g'(\Delta\lambda) = \frac{1}{2}\Psi'(\Delta\lambda) - \frac{2}{3}R \left( p_n + \sqrt{\frac{2}{3}\Psi(\Delta\lambda)\Delta\lambda} \right) R' \left( p_n + \sqrt{\frac{2}{3}\Psi(\Delta\lambda)\Delta\lambda} \right) \sqrt{\frac{2}{3} \left( \frac{\Psi'(\Delta\lambda)\Delta\lambda}{2\sqrt{\Psi(\Delta\lambda)}} + \sqrt{\Psi(\Delta\lambda)} \right)} \quad (49)$$

#### 4.2.4.2 Calcul de la matrice tangente consistante

La relation tangente est obtenue en écrivant que le critère et la variation du critère est nulle à la fin du pas :

$$dg = d \left( \frac{1}{2}\Phi_{n+1}^2 - \frac{1}{3}R^2 \right) = 0 \quad \text{avec} \quad \Phi_{n+1} = \sqrt{\boldsymbol{\eta}_{n+1}^T P \boldsymbol{\eta}_{n+1}} \quad (50)$$

$$\Phi_{n+1} d\Phi_{n+1} - \frac{2}{3}RR' dp_{n+1} = 0 \quad (51)$$

d'après (38) on a :

$$dp_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\lambda d\Phi_{n+1} + \sqrt{\frac{2}{3}}\Phi_{n+1} d(\Delta\lambda) \quad (52)$$

d'où

$$\Phi_{n+1} d\Phi_{n+1} - \frac{2}{3}RR' \left( \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\lambda d\Phi_{n+1} + \sqrt{\frac{2}{3}}\Phi_{n+1} d(\Delta\lambda) \right) = 0 \quad (53)$$

$$\frac{1}{2}\Phi_{n+1}^2 - \frac{1}{3}R^2 = 0 \Rightarrow \Phi_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}}R \quad (54)$$

d'où

$$d(\Delta\lambda) = \frac{1 - \frac{2}{3}R'\Delta\lambda}{\frac{2}{3}R'\Phi_{n+1}} d\Phi_{n+1} = \frac{\left(1 - \frac{2}{3}R'\Delta\lambda\right)\boldsymbol{\eta}_{n+1}^T P d\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{\frac{2}{3}R'\Phi_{n+1}^2} \quad (55)$$

avec

$$d\boldsymbol{\eta}_{n+1} = d\mathbf{s}_{n+1} - d\mathbf{x}_{n+1} = d\mathbf{s}_{n+1} - \frac{2}{3}H(\Delta\lambda d\boldsymbol{\eta}_{n+1} + \boldsymbol{\eta}_{n+1} d(\Delta\lambda))$$

d'où

$$d\boldsymbol{\eta}_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}H\Delta\lambda} \left( d\mathbf{s}_{n+1} - \frac{2}{3}H\boldsymbol{\eta}_{n+1} d(\Delta\lambda) \right) \quad (56)$$

Injectant (56) dans (55) il vient :

$$d(\Delta\lambda) = \frac{\left(1 - \frac{2}{3}R'\Delta\lambda\right)\boldsymbol{\eta}_{n+1}^T P d\mathbf{s}_{n+1}}{\frac{2}{3}(R'+H)\Phi_{n+1}^2} \quad (57)$$

$$d\mathbf{s}_{n+1} = G(d\mathbf{e}_{n+1} - d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) = G(d\mathbf{e}_{n+1} - d(\Delta\lambda)\boldsymbol{\eta}_{n+1} - \Delta\lambda d\boldsymbol{\eta}_{n+1}) \quad (58)$$

Injectant (56) et (57) dans (58) on obtient :

$$d\mathbf{s}_{n+1} = G \left( \mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{\eta}_{n+1} P \boldsymbol{\eta}_{n+1}^T}{w\Phi_{n+1}^2} \right) d\mathbf{e}_{n+1} = \bar{\mathbf{A}} d\mathbf{e}_{n+1} \quad \text{avec} \quad w = \left( 1 + \frac{2(H+R')}{3G \left(1 - \frac{2}{3}R'\Delta\lambda\right)} \right) \quad (59)$$

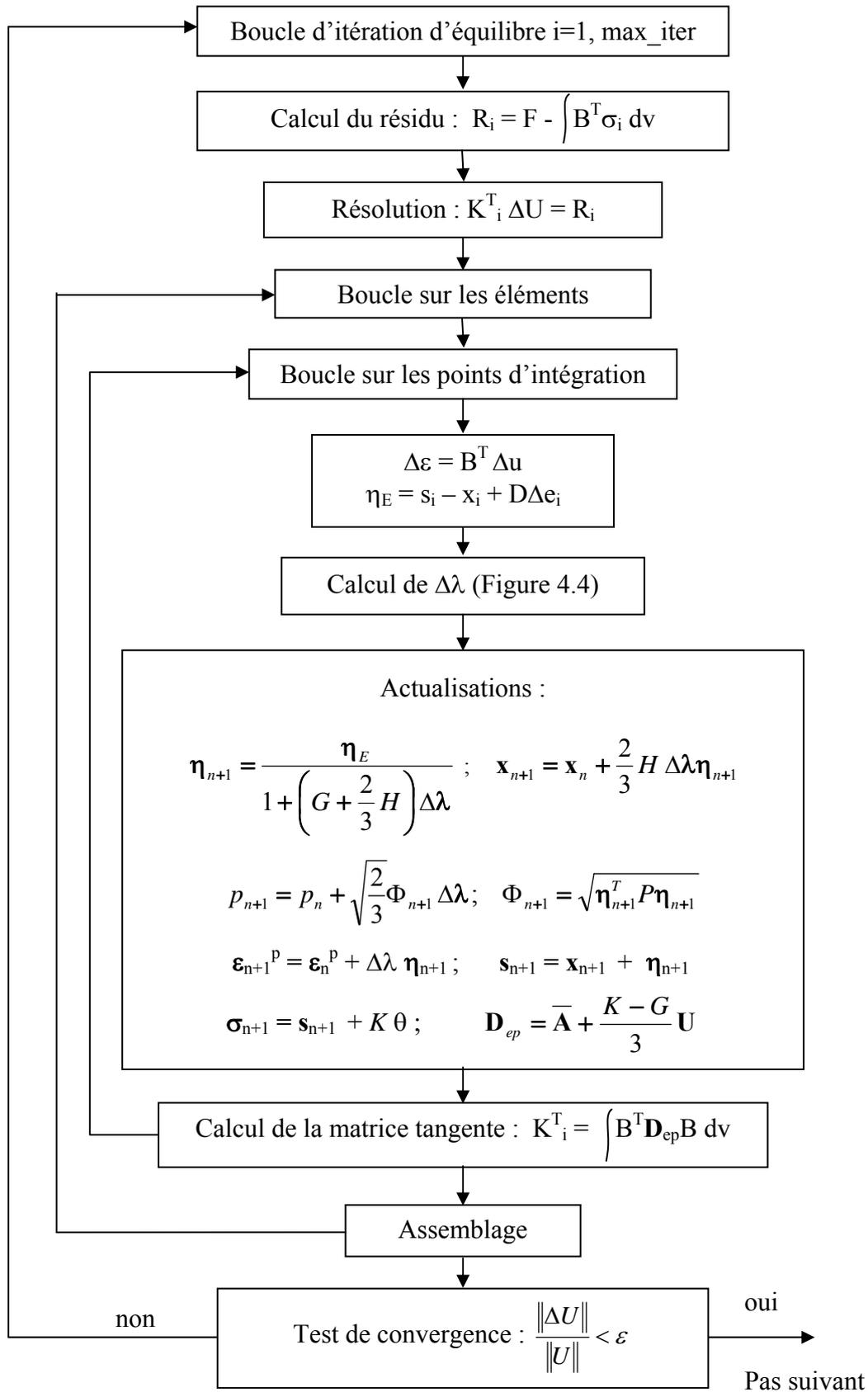
Par analogie avec la relation (32) on obtient finalement la matrice tangente consistante :

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D}_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$$

avec

$$\mathbf{D}_{ep} = \bar{\mathbf{A}} + \frac{K-G}{3}\mathbf{U} \quad (60)$$

La méthode du retour radial est équivalente à la méthode implicite pure qui vérifie le critère de la plasticité à la fin du pas et garde ses propriétés de stabilité inconditionnelle. L'organigramme général de la méthode d'intégration est présenté à la figure 4.5.



#### 4.2.5 Programmation en C++

```
#include <windows.h>
#include <iostream.h>
#include <fstream.h>
#include <string.h>
#include "Objet_math.h"
//-----
// Function : Numerical integration of elastoplastic constitutive equations
//-----
// Method : consistent linearization introduced by J.C. Nagtegaal
//          and extended by J.C. Simo & R.L. Taylor
//-----
// References :
// J.C Nagtegaal, "On the implementation of inelastic constitutive equations
// with special reference to large deformation problems"
// Comp. Methods Appl. Mech. Eng., Vol.33, 469-484 (1982).
// Simo J.C. and Taylor R.L.,
// "Consistent tangent operator for rate-independant elasto-
// plasticity,
// Comp. Methods Appl. Mech. Eng., Vol.48, 101-118 (1985).
// Simo J.C. and Taylor R.L.,
// "A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity
// Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.22, 649-670 (1986).
//-----
// Written by : Z.Q. Feng
//-----
//
void main(int argc, char* argv[]){
    char filename[30],file_inp[30],file_out[30];
    if (argc==1) {cout<<"Input file name please? "; cin>>filename;}
    else strcpy(filename,argv[1]);
    strcpy(file_inp,filename); strcat(file_inp, ".inp");
    strcpy(file_out,filename); strcat(file_out, ".xls");
    fstream Inp,Out;
    Inp.open(file_inp,ios::in);
    Out.open(file_out,ios::out);
    //
    int i,step,iter,nstep;
    double young,poisson,G,K;
    double p,mises,c1,cst1,cst,g,g_prim,phi,phi_prim,lamda,dlamda,teta;
    double R,R_prim,Rs,R0,gamma,H,J2;
    TENSEUR sigma(6),s(6),x(6),eta(6),eta_elas(6),strain_t(6),strain_p(6),dstrain(6);
    TENSEUR xx(6),I(6); I[0]=I[1]=I[2]=1.0;
    MATRICE P(6,6); P[0][0]=P[1][1]=P[2][2]=1.0; P[3][3]=P[4][4]=P[5][5]=2.0;
    //
    /* data input */
    //
    char ligne[100];
    Inp>>ligne; Inp>>young>>poisson;
    Inp>>ligne; Inp>>Rs>>R0>>gamma>>H;
    Inp>>ligne; for (i=0;i<6;i++) Inp>>dstrain[i];
    Inp>>ligne; Inp>>nstep;
    //
    // D matrix
    //
    G=young/(1.0+poisson); K=young/(1.0-2.0*poisson);
    MATRICE D(6,6);
    c1=(1.0+poisson)*(1.0-2.0*poisson); cst=young*(1.0-poisson)/c1;
    cst1=young*poisson/c1;
    D[0][0]=D[1][1]=D[2][2]=cst;
    D[0][1]=D[1][0]=D[0][2]=D[2][0]=D[1][2]=D[2][1]=cst1;
    D[3][3]=D[4][4]=D[5][5]=G/2.0;
    Out<<"\tseq\tJ2"<<endl;
```

```

//
/* incremental step */
//
R=R0;
for(step=0;step<nstep;step++){
    strain_t+=dstrain;
    s=sigma.devia();
    eta_elas=s-x+D*dstrain.devia();
//    eta_elas=G*(strain_t.devia()-strain_p)-x;
    cst=eta_elas*(P*eta_elas);
    g=0.5*cst-0.33333*R*R;
    if (g>=0.0) {
        // plasticity
        lamda=0.0;
        // calculation of plastic multiplier "lamda" by Newton method
        for(iter=0;iter<100;iter++){
            cst1=1.0+(G+0.6667*H)*lamda;
            phi=cst/(cst1*cst1);
            phi_prim=-2*cst*(G+0.6667*H)/(cst1*cst1*cst1);
            p=p+sqrt(0.66667*phi)*lamda;
            R=Rs-(Rs-R0)*exp(-gamma*p);
            R_prim=gamma*(Rs-R0)*exp(-gamma*p);
            g=0.5*phi-0.33333*R*R;
            g_prim=0.5*phi_prim-0.66667*R*R_prim*sqrt(0.66667)*
                (0.5*phi_prim*lamda/sqrt(phi)+sqrt(phi));
            dlamda=-g/g_prim;
            lamda+=dlamda;
            if (fabs(g/g_prim)<0.00001) break;
        }
        //
        // actualisation
        //
        eta=eta_elas/(1.0+(G+0.6667*H)*lamda);
        x+=(0.66667*H*lamda)*eta;
        p+=sqrt(0.66667*eta*(P*eta))*lamda;
        strain_p+=lamda*eta;
        s=x+eta;
    }
    else {
        // elasticity
        s=eta_elas;
        eta=eta_elas;
        p=0.0;
    }
//
    teta=0.3333*strain_t.equiv1();
    sigma=s+(K*teta)*I;
    mises=sigma.equiv2();
    mises=sqrt(mises);
    J2=sqrt(1.5*eta*(P*eta));
    Out<<p<<"\t"<<mises<<"\t"<<J2<<endl;
}
exit(0);
}

```

### 4.3 MODELES DE GRANDES DEFORMATIONS ELASTOPLASTIQUES

Dans le paragraphe précédent, on a présenté en détails les théories des petites déformations élastoplastique, et surtout la méthode du retour radial pour intégrer la loi de comportement. L'extension de ces théories aux grandes déformation entraîne l'existence d'un repère privilégié et il existe un couplage des vitesses de déformations plastiques et élastiques et de la vitesse de rotation, vis-à-vis de ce repère.

Contrairement aux petites déformations, lorsqu'apparaissent dans un solide de grands déplacement et de grandes déformations, il n'est plus possible de confondre les configurations déformée et non déformée. Une attention particulière doit alors être portée à la cinématique, aux repérage des particules et aux choix des mesures des déformations et des contraintes. Ces aspects sont développés dans de nombreux ouvrages de mécanique notamment ceux de Malvern [20], Sidoroff [21], Gélin *et al.* [22,23].

#### 4.3.1 Description des grandes transformations

La description des grandes transformations géométrique d'un solide nécessite le repérage des particules P qui le constituent tout au long de son mouvement dans le temps. Un rappel des définitions de ce que l'on appelle dans la suite : référentiel, configuration, tenseur de déformations ... est nécessaire.

#### Référentiel, repère, configuration

La notion de référentiel est liée à celle d'observateur. On appelle référentiel, noté  $\mathfrak{R}$ , un ensemble de points animés d'un mouvement de corps rigide. Pour repérer les positions spatiales des particules P il est commode d'introduire dans le référentiel  $\mathfrak{R}$  un repère R, souvent orthonormé. Dans ce repère, qui matérialise le référentiel, une particule P à l'instant t fixé a pour coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$ . L'ensemble des positions spatiales  $x$  occupées par les particules P du solide, à chaque instant t, s'appelle la configuration du solide à l'instant t, notée  $C_t$ . On introduit souvent une configuration de référence  $C_0$  qui est une configuration particulière connue du solide à un instant  $t_0$  connu (Figure 4.6).

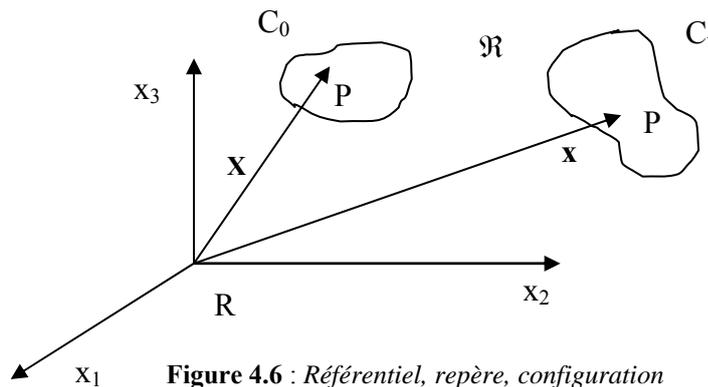


Figure 4.6 : Référentiel, repère, configuration

#### Gradient de déformation

Dans une description lagrangienne, le mouvement du milieu continu peut être défini, par rapport à une configuration de référence  $C_0$ , par la fonction vectorielle  $\Phi$  :

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) \quad (61)$$

La fonction  $\Phi$  donne la position  $\mathbf{x}$  à l'instant t de la particule P qui occupait la position  $\mathbf{X}$  à l'instant  $t_0$  dans la configuration de référence  $C_0$ . Il est habituel d'introduire le vecteur déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  et d'écrire (61) sous la forme équivalente :

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (62)$$

La fonction  $\Phi$  définit le mouvement global du solide. Pour écrire les transformations géométriques au voisinage d'une particule P entre une configuration de référence  $C_0$  et la configuration actuelle  $C_t$ , on introduit le tenseur gradient de déformation  $\mathbf{F}$  défini par :

$$F_{ij}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (63)$$

Localement les formules de transport s'écrivent :

- Pour un vecteur : 
$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (64)$$

- Pour un volume : 
$$dv = J(\mathbf{F}) dV \quad \text{avec } J(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}) \quad (65)$$

- Pour une surface orientée :  $ds = J(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} dS$  (66)

### Mesures des déformations

Le tenseur gradient de déformation  $\mathbf{F}$  recèle des informations à la fois sur la déformation du solide et sur sa rotation au voisinage d'une particule. Les lois de comportement écrites en fonction de  $\mathbf{F}$  doivent être construites de manière à ce qu'à une rotation de corps rigide ne corresponde aucune modification de l'état de contraintes. Des mesures des déformations nulles dans le cas d'une rotation de corps rigide, permettent d'écrire des lois de comportement qui satisfont cette condition.

Pour caractériser les changements de forme, il faut caractériser les variations de longueurs et les variations d'angles, soit en fait les variations de produits scalaires. En partant de deux vecteurs  $d\mathbf{X}$  et  $\delta\mathbf{X}$  qui après déformations deviennent  $d\mathbf{x}$  et  $\delta\mathbf{x}$ , et d'après la relation (64) on peut écrire :

$$d\mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{x} = d\mathbf{X} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \delta\mathbf{X} = d\mathbf{X} \mathbf{C} \delta\mathbf{X} \quad (67)$$

Le tenseur  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ , symétrique, est le tenseur des dilatations ou encore le tenseur de Cauchy-Green droite. Pour caractériser les allongements, on introduit un nouveau tenseur en comparant les produits scalaires  $d\mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{x}$  et  $d\mathbf{X} \cdot \delta\mathbf{X}$  :

$$d\mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot \delta\mathbf{X} = 2 d\mathbf{X} \mathbf{E} \delta\mathbf{X} \quad (68)$$

Le tenseur  $\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2$ , symétrique, est le tenseur des déformations de Green-Lagrange. Il a les mêmes directions principales que le tenseur  $\mathbf{C}$ . Ces deux tenseurs sont lagrangiens, ils opèrent sur des quantités définies sur la configuration de référence  $C_0$ .

Le tenseur eulérien correspondant à  $\mathbf{C}$  est défini de la manière suivante :

$$d\mathbf{X} \cdot \delta\mathbf{X} = d\mathbf{x} \mathbf{F}^{-1T} \mathbf{F}^{-1} \delta\mathbf{x} = d\mathbf{x} \mathbf{B}^{-1} \delta\mathbf{x} \quad (69)$$

Le tenseur  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$ , symétrique, est le tenseur de Cauchy-Green gauche.

Le tenseur eulérien équivalent à  $\mathbf{E}$  est défini par la relation :

$$2\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1} \quad (70)$$

Le tenseur  $\mathbf{A}$  est le tenseur d'Almansi. Il exprime les mêmes variations géométriques que le tenseur  $\mathbf{E}$  :

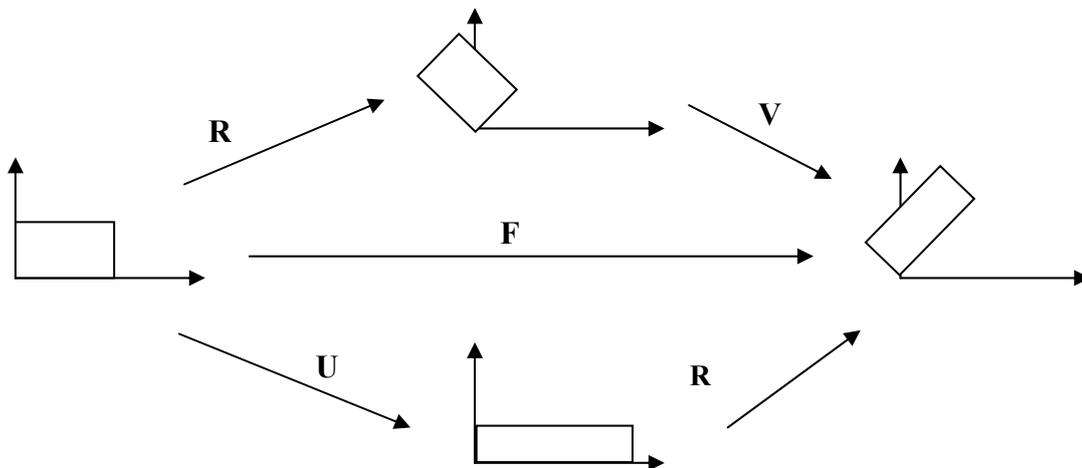
$$d\mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot \delta\mathbf{X} = 2 d\mathbf{x} \mathbf{A} \delta\mathbf{x}$$

### Décomposition polaire

Une autre méthode pour éliminer la rotation de corps rigide dans la mesure des déformations est la décomposition polaire de  $\mathbf{F}$  en un tenseur de rotation de corps rigide  $\mathbf{R}$  orthogonal et un tenseur de déformation pure symétrique  $\mathbf{U}$  ou  $\mathbf{V}$ .

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (71)$$

La figure 4.7 illustre cette décomposition.



**Figure 4.7 : Décomposition polaire**

Les tenseurs  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{U}$  d'une part et  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{V}$  d'autre part décrivent les mêmes changements de forme à partir de la configuration de référence et de la configuration de actuelle. Ils sont liés par les relations suivantes :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U} \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad (72)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V} \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{V} = \mathbf{V}^2 \quad (73)$$

Les directions principales de  $\mathbf{C}$  (respectivement  $\mathbf{B}$ ) coïncident avec directions principales de  $\mathbf{U}$  (respectivement  $\mathbf{V}$ ). Le calcul de  $\mathbf{U}$  (respectivement  $\mathbf{V}$ ) peut se faire à partir de  $\mathbf{C}$  (respectivement  $\mathbf{B}$ ) en suivant les étapes suivantes :

- diagonaliser  $\mathbf{C}$  :  $\mathbf{C}^d = \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}$  où  $\mathbf{Q}$  contient les vecteurs propres de  $\mathbf{C}$
- calculer :  $\mathbf{U}^d = (\mathbf{C}^d)^{1/2}$
- calculer :  $\mathbf{U} = \mathbf{Q} \mathbf{U}^d \mathbf{Q}^T$

La rotation  $\mathbf{R}$  de corps rigide s'obtient alors par :  $\mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1}$  (74)

### Taux de déformation

La vitesse, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , de la particule  $P$  qui occupe la position  $\mathbf{X}$  dans la configuration de référence  $C_0$  s'obtient à partir de la relation (61) par :

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (75)$$

La dérivée par rapport au temps du tenseur gradient de déformation s'exprime alors en fonction de  $\mathbf{v}$  par :

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right) \quad (76)$$

La dérivée par rapport au temps d'un vecteur  $d\mathbf{x}$  dans la configuration actuelle  $C_t$  s'obtient en dérivant l'expression (64) :

$$d\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} d\mathbf{X} \quad (77)$$

Le tenseur eulérien correspondant à  $\dot{\mathbf{F}}$  défini sur la configuration actuelle  $C_t$  est obtenu en remplaçant  $d\mathbf{X}$  par son expression (64) dans (77) :

$$d\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} = \mathbf{L} d\mathbf{x} \quad (78)$$

le tenseur non symétrique  $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}$  est appelé le tenseur gradient des vitesses de déformations. Il se

décompose en deux parties  $\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$  : une partie symétrique  $\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$  liée à la vitesse de déformation de la matière et une partie antisymétrique  $\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$  liée à la vitesse de rotation de la matière. En remplaçant  $\mathbf{L}$  par son expression

$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$  et  $\mathbf{F}$  par  $\mathbf{R} \mathbf{U}$  et en utilisant l'orthogonalité de  $\mathbf{R}$  on obtient :

$$\mathbf{D} = \mathbf{R} \left[ \dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} \right] \mathbf{R}^T \quad (79)$$

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \left[ \dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} \right]^a \mathbf{R}^T \quad (80)$$

### 4.3.2 Intégration des lois de comportement en grandes transformations

La recherche de l'état d'équilibre d'un solide soumis à des efforts extérieurs, nécessite la détermination des efforts intérieurs qui s'y développent. Ces efforts intérieurs, c'est à dire les tenseurs de contraintes, dépendent des lois traduisant le comportement physique du solide. D'une manière générale, une loi de comportement s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F}_{\tau < t} \{ \mathbf{F}(\tau) \} \quad (81)$$

où  $\mathcal{F}$  est la fonctionnelle de réponse du matériau.

Deux mouvements  $\Phi^*(\mathbf{X}, t)$  et  $\Phi(\mathbf{X}, t)$  sont dits **objectivement équivalents** si et seulement si

$$\Phi^*(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Z}(t) (\Phi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{o}) + \mathbf{c}(t) \quad (82)$$

avec

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \mathbf{I} ; \quad \det(\mathbf{Z}) = 1.$$

où  $\mathbf{o}$  représente un point fixe,  $\mathbf{c}$  une translation et  $\mathbf{Z}(t)$  une rotation du corps rigide. On peut facilement montrer que :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^* &= \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Z} \mathbf{F} \\ \mathbf{L}^* &= \dot{\mathbf{F}}^* \mathbf{F}^{*-1} = \dot{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^T + \mathbf{Z} \mathbf{L} \mathbf{Z}^T \\ \mathbf{D}^* &= \mathbf{Z} \mathbf{D} \mathbf{Z}^T \\ \mathbf{W}^* &= \dot{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}^T + \mathbf{Z} \mathbf{W} \mathbf{Z}^T \end{aligned} \quad (83)$$

Un algorithme d'intégration des lois de comportement est dit *incrémentalement objectif* si, pour un mouvement de corps rigide sur l'intervalle temporel  $[t, t+\Delta t]$ , soit :

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = \mathbf{Q} \mathbf{x}_t + \mathbf{c} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad (84)$$

les contraintes de Cauchy sont actualisées de manière exacte selon

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}_t \mathbf{Q}^T \quad (85)$$

où  $\mathbf{Q}$  est le tenseur de rotation incrémentale.

Une loi constitutive en grandes transformations doit relier des quantités tensorielles et satisfaire le principe de l'objectivité. Ce principe s'exprime que la loi de comportement doit être indépendante du référentiel choisi pour observer le mouvement du solide. La fonctionnelle  $\mathcal{I}$  doit être alors invariante dans tout changement de référentiel d'observation. Ainsi, si on change  $\mathbf{F}$  par  $\mathbf{Q}\mathbf{F}$ , le tenseur de contrainte de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  doit être remplacé par  $\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T$ , c'est à dire :

$$\mathcal{I}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \mathcal{I}(\mathbf{F}) \quad (87)$$

ceci revient à écrire que dans le référentiel tournant :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathcal{I}(\mathbf{F}^*) = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T \quad (88)$$

Pour étendre la relation (32) au cas de grandes déformations et rotations, on peut adopter deux solutions :

1. Remplacer  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  par une dérivée objective :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{obj}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\sigma} \quad (89)$$

où  $\boldsymbol{\Omega}$  est un tenseur vitesse de rotation. Son choix conduit aux différentes dérivées objectives :

$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}$	: dans le cas d'un mouvement du corps rigide
$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}[\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}]^{\mathbf{a}}\mathbf{R}^T$	: la dérivée objective correspond à celle de Jaumann
$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$	: la dérivée objective correspond à celle de Green-Naghdi
$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W}_i$	: la dérivée objective correspond à celle de Lee ( $\mathbf{W}_i$ est la vitesse de rotation d'une facette particulière)

2. Exprimer les lois de comportement dans un repère tournant avec la vitesse de rotation  $\boldsymbol{\Omega}$ . Le relation (32) s'écrit dans le cas de grandes déformations :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{D}_{\text{ep}}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{D}', \mathbf{v}') : \mathbf{D}' \quad (90)$$

avec  $\mathbf{D}_{\text{ep}}$  le tenseur caractérisant le matériau considéré et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}' &= \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q} \\ \mathbf{D}' &= \mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q} \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{Q}^T \mathbf{v} \mathbf{Q} \end{aligned}$$

où  $\mathbf{v}$  représente les variables internes. Le tenseur de rotation incrémentale  $\mathbf{Q}$  est solution du problème de valeurs initiales :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}(\tau) \mathbf{Q}(\tau)^T &= \boldsymbol{\Omega}(\tau); \quad t \leq \tau \leq t + \Delta t \\ \mathbf{Q}(t) &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (91)$$

avec  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W}$  : repère corrotationnel (dérivée de Jaumann)

$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$  : repère en rotation propre (dérivée de Green-Naghdi)

$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W}_i$  : repère tournant avec la vitesse de rotation d'une facette particulière (dérivée de Lee)

Le tenseur  $\mathbf{Q}$  peut aussi être choisi comme la rotation propre  $\mathbf{R}$  calculé par décomposition polaire de  $\mathbf{F}$  (Eq.74). Dans ce cas et à l'aide de la relation (79), on a :

$$\mathbf{D}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} [\dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1}]^{\mathbf{f}} \mathbf{R}^T \mathbf{R} = [\dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1}]^{\mathbf{f}} \quad (92)$$

Pour intégrer la loi de comportement (90), on peut toujours utiliser l'algorithme de retour radiale détaillé au paragraphe 4.2 sur l'intervalle de temps  $[t, t+\Delta t]$ , mais dans le cas de grandes déformations et rotations il est important de choisir une approximation cinématique au cours d'un pas de temps pour évaluer le tenseur vitesse de déformation  $\mathbf{D}'$ . L'hypothèse

cinématique la plus simple et la plus courante consiste à supposer que la vitesse des particules est constant au cours de l'incrément considéré. Celle-ci est alors donnée par :

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{x}_{t+\Delta t} - \mathbf{x}_t}{\Delta t} \quad (93)$$

Ceci implique une variation similaire du gradient de déformation  $\mathbf{F}_\tau$  :

$$\mathbf{F}_\tau = \frac{(t + \Delta t - \tau)\mathbf{F}_t + (\tau - t)\mathbf{F}_{t+\Delta t}}{\Delta t}; \quad \tau \in [t, t + \Delta t] \quad (94)$$

L'approximation du chemin réel par un chemin linéaire à vitesse constante présente les inconvénients suivantes :

- Si la transformation entre  $t$  et  $t+\Delta t$  est une rotation pure, la transformation définie par (94) ne l'est pas, d'où apparition de déformations parasites affectant les variables internes du solide. Ce schéma ne donc est pas incrémentalement objectif.
- Si la transformation entre  $t$  et  $t+\Delta t$  se fait à volume constant, le présent schéma provoque une variation de volume.

Pour améliorer cette approximation, Hughes et Winget [11] proposent les approximations suivantes :

$$\mathbf{D}_\tau = \mathbf{D}_{t+\Delta t/2} = \text{constante} \quad (95)$$

$$\mathbf{Q}_\tau = \mathbf{Q}_{t+\Delta t/2} = \text{constante} \quad (96)$$

La rotation  $\mathbf{Q}$  est calculée à partir de l'équation différentielle  $\dot{\mathbf{Q}}_\tau \mathbf{Q}_\tau^T = \mathbf{W}_\tau$ , définissant le repère corotationnel, en utilisant la méthode du point milieu généralisée

$$\mathbf{Q}_\tau = \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{W}_{t+\Delta t/2} \right]^{-1} \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{W}_{t+\Delta t/2} \right] \mathbf{Q}_t \quad (97)$$

L'hypothèse de vitesse constante le long du chemin de déformation n'est évidemment pas la seule possible. Une première alternative est le chemin à gradient de vitesse constant suggéré par Godinas [25]. Une deuxième alternative est le schéma de la rotation finale instantanée (RFI) dû à Nagtegaal et Veldpaus [9,10,26] et repris par Braudel et al. [27,28]. Comme le schéma de Hughes et Winget, il est aussi basé sur une approche corotationnelle. Par rapport à ce dernier, il présente les avantages suivants :

- Il est toujours incrémentalement objectif quelle que soit la taille du pas de temps;
- Il ne génère pas de déformations parasites dans le cas d'une rotation de corps rigide;
- Il ne génère aucune variation de volume parasite ;
- Il est plus simple et donc plus économique ;
- Il est possible d'obtenir analytiquement un opérateur tangent consistant. Ce dernier point résultant de sa plus grande simplicité.

Partons de l'équation (90), on en déduit dans le système d'axes corotationnels :

$$\boldsymbol{\sigma}'_{t+\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}'_t + \int_t^{t+\Delta t} \dot{\boldsymbol{\sigma}}' d\tau \quad (98)$$

ou bien

$$\mathbf{R}_{t+\Delta t}^T \boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} \mathbf{R}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_t^T \boldsymbol{\sigma}_t \mathbf{R}_t + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{D}_{ep} : \mathbf{D}' d\tau \quad (99)$$

d'où la relation

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{t+\Delta t} \left[ \mathbf{R}_t^T \boldsymbol{\sigma}_t \mathbf{R}_t + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{D}_{ep} : \mathbf{D}' d\tau \right] \mathbf{R}_{t+\Delta t}^T \quad (100)$$

En particulier, si on choisit comme configuration de référence, la dernière configuration équilibrée à l'instant  $t$  (formulation actualisée), de plus, on lie le système corotationnel à la rotation matérielle locale, alors on peut écrire à chaque instant  $\tau \in [t, t + \Delta t]$  :

$$\mathbf{F}_\tau = \mathbf{R}_t \mathbf{U}_\tau \quad (101)$$

avec, en particulier

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{R}_t = \mathbf{U}_t = \mathbf{I} \quad (102)$$

Il en résulte que, dans la configuration courante on a :

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{t+\Delta t} \left[ \boldsymbol{\sigma}_t + \Delta \boldsymbol{\sigma}' \right] \mathbf{R}_{t+\Delta t}^T \quad (103)$$

avec

$$\Delta \sigma' = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{D}_{ep} : \mathbf{D}' d\tau$$

Dans le cas du matériau élastique,  $\mathbf{D}_{ep}$  s'identifie avec  $\mathbf{H}$ , le tenseur de Hooke, alors on peut écrire :

$$\Delta \sigma' = \mathbf{H} : \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{D}' d\tau$$

Notons que, si on suppose la vitesse de déformation constante au cours de l'incrément, et qu'on approxime l'intégrale par

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{D}' d\tau \approx \Delta t \mathbf{D}'_{\alpha} = \Delta t \mathbf{R}_{\alpha}^T \mathbf{D}_{\alpha} \mathbf{R}_{\alpha} \quad \alpha \in [0, 1] \quad (104)$$

alors, pour  $\alpha = 1/2$ , on retrouve le schéma de Hughes et Winget.

Afin de permettre l'évaluation de l'intégrale contenue dans la relation (100), il faut préciser la forme du terme  $\mathbf{D}'$  tel que décrit en (92). Pour ce faire, prenons l'hypothèse d'une variation exponentielle du tenseur des déformations pures droit  $\mathbf{U}$  au cours de l'incrément. C'est à dire, il garde ses axes propres fixes :

$$\mathbf{U}_{\tau} = \exp\left(\frac{\tau - t}{\Delta t} \mathbf{C}\right) \quad (105)$$

où  $\mathbf{C}$  est un tenseur constant. La dérivée temporelle de  $\mathbf{U}$  est alors donnée par

$$\dot{\mathbf{U}}_{\tau} = \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \exp\left(\frac{\tau - t}{\Delta t} \mathbf{C}\right) = \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \mathbf{U}_{\tau} \quad (106)$$

A l'aide des relations (92), (105) et (106), on peut finalement écrire

$$\mathbf{D}' = \left[ \dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} \right]^{\sharp} = \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} = \text{constant} \quad (107)$$

Il nous reste à déterminer  $\mathbf{C}$ . Or, en  $\tau = t + \Delta t$ , on peut écrire, en vertu de l'hypothèse (105) :

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}_{t+\Delta t}^2 = \mathbf{U}^2 = \exp(2\mathbf{C})$$

D'où

$$\mathbf{C} = 1/2 \ln(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \ln(\mathbf{U}) \quad (108)$$

Le tenseur  $\mathbf{C}$  s'identifie donc au tenseur naturel ou logarithmique des déformation entre les configurations  $\mathbf{C}_t$  et  $\mathbf{C}_{t+\Delta t}$ . Si la transformation entre est un mouvement de corps rigide, alors  $\mathbf{F} = \mathbf{R}$  et  $\mathbf{U} = \mathbf{I}$ . On en déduit :

$$\mathbf{C} = \ln(\mathbf{U}) = \ln(\mathbf{I}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}' = 0 \quad (109)$$

#### 4.4 EXEMPLES NUMERIQUES

Les exemples tests ont pour but de valider l'algorithme d'intégration des lois de comportement en petites ou grandes déformations.

**Exemple 1 :** *Petites déformations élastoplastiques (algorithme de retour radial)*

On teste l'algorithme développé au paragraphe 4.2 et le programme réalisé sur un élément de volume avec les données suivantes :

- Module de Young :  $E = 200000 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson :  $\nu = 0.3$
- Limite élastique (rayon initial) :  $R_0 = 200 \text{ MPa}$  (ou  $500 \text{ MPa}$ )
- Rayon saturé :  $R_s = 500 \text{ MPa}$  (ou  $200 \text{ MPa}$ )
- Exposant :  $\gamma = 50$
- Pente de l'écrouissage cinématique linéaire :  $H = 50000 \text{ MPa}$
- Accroissement de déformations totales :  $\Delta \varepsilon = \langle 0.00005 \ -0.00001 \ -0.00001 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \rangle$

Les figures 4.8 et 4.9 montrent l'évolution de la contrainte équivalent de Von-Mises (seq) et l'évolution du rayon du domaine élastique (J2). On notera que si  $R_s > R_0$  ( $R_0 = 200$  et  $R_s = 500$ ), le matériau durcit au cours d'un écoulement plastique (Figure 4.8) ; par contre si  $R_s < R_0$  ( $R_0 = 500$  et  $R_s = 200$ ), l'écoulement engendre un adoucissement du matériau (Figure 4.9).

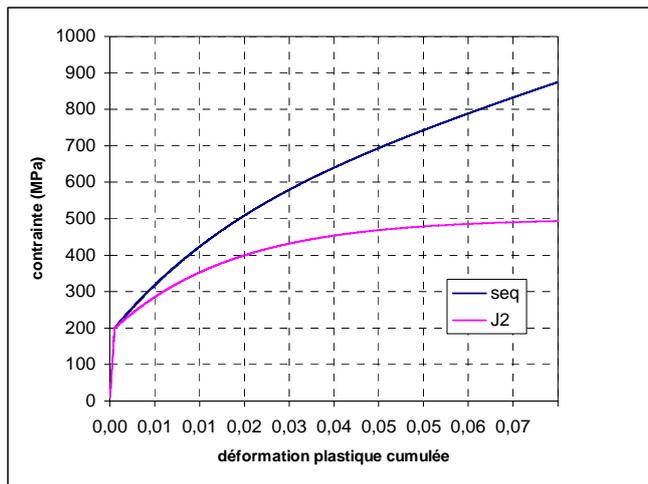


Figure 4.8 : Durcissement

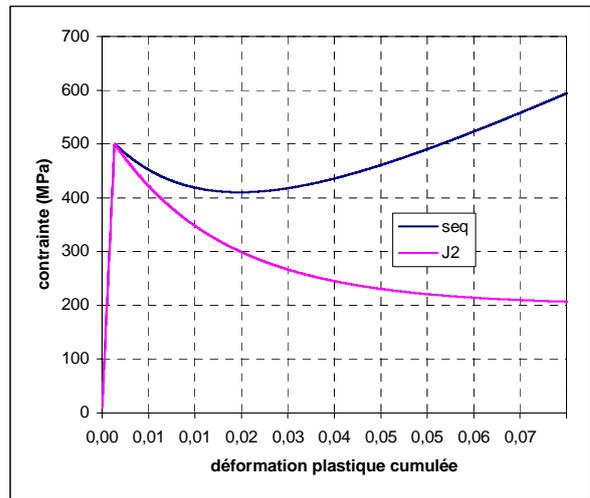


Figure 4.9 : Adoucissement

**Exemple 2 :** *Grandes déformations : test au niveau d'un point d'intégration – comparaison des dérivées objectives de Jaumann / Green-Naghdi*

La comparaison de ces deux dérivées objectives utilisées dans des lois hypoélastiques et élastoplastiques a fait l'objet de plusieurs études : Dafalias [24] et EL Mouatassim [7]. Dans ce test on utilise une loi hypoélastique pour deux cinématiques différentes avec les données :  $E = 200000 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0.3$  et l'hypothèse des déformations planes.

*Cinématique 1 : cisaillement simple :* 
$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad 0 \leq t \leq 6$$

Comme montré la figure 4.10, l'utilisation de la dérivée de Jaumann dans une loi hypoélastique provoque des oscillations sinusoidales des contraintes alors que celle de Green-Naghdi conduit à des contraintes qui croissent régulièrement au cours du chargement.

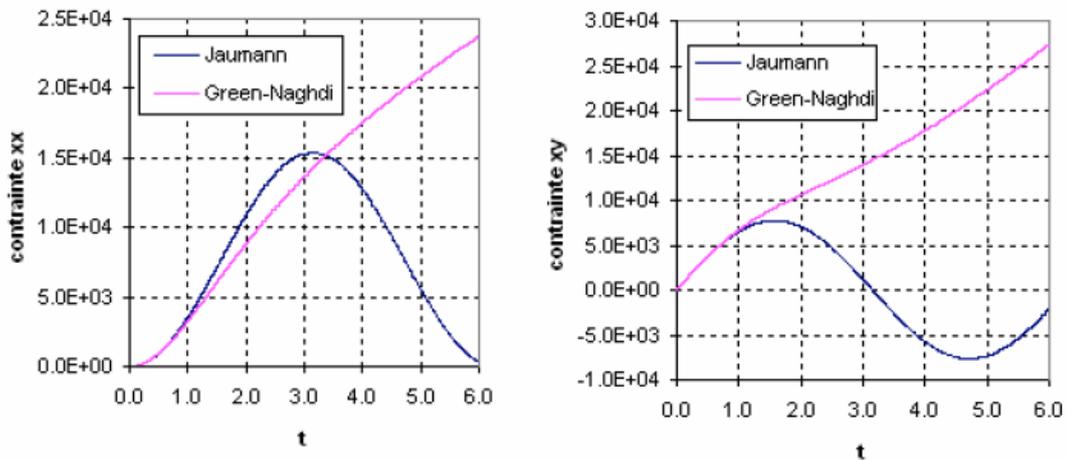


Figure 4.10 : Comparaison des dérivées objectives de Jaumann / Green-Naghdi

*Cinématique 2 : élongation combinée avec une rotation :*

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{cases} \lambda(t) = 1 + t \\ \theta(t) = 2\pi t \\ 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Dans cet exemple les élongations ne sont permises que dans une seule direction. Le repère corrotationnel et le repère propre tournent avec la même vitesse. On obtient donc les mêmes résultats (Figure 4.11) par les deux dérivées objectives.

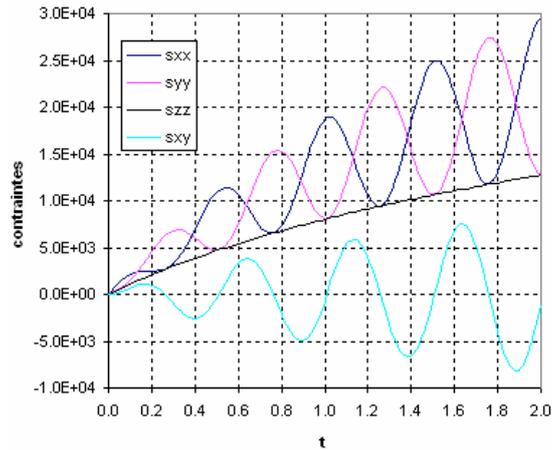


Figure 4.11 : Elongation combinée avec une rotation

### Exemple 3 : chargement d'une poutre en flexion

Ce test au niveau d'une structure a été proposé dans le cadre du GRECO grandes déformations et endommagement. Le maillage de la poutre (48 éléments à 8 nœuds et 9 points d'intégration), les conditions aux limites et le chargement (déplacement imposé) sont définis sur la figure 4.12. La loi de comportement utilisée est une loi élastoplastique avec écrouissage isotrope linéaire. Les caractéristiques mécaniques de la poutre sont :

- Module de Young :  $E = 200000$  MPa
- Coefficient de Poisson :  $\nu = 0.3$
- Limite élastique :  $\sigma_e = 400$  MPa
- Pente d'écrouissage :  $R' = 1000$  MPa

avec l'hypothèse de déformations planes et le choix de la dérivée objective de Jaumann.

Ce test présente l'intérêt de générer différentes combinaisons de trajets de déformation de la poutre : grandes déformations et petites rotations près de l'encastrement (points 1,2,3 Figure 4.12), grandes déformations et grandes rotations près de l'application du chargement (points 5 Figure 4.12) et petites déformations et petites rotations au voisinage du point 4. La figure 4.13 montre le maillage initial et la répartition des déformations plastiques équivalentes dans la poutre déformée. Les zones proches de l'encastrement et du point d'application du chargement sont les plus plastifiées.

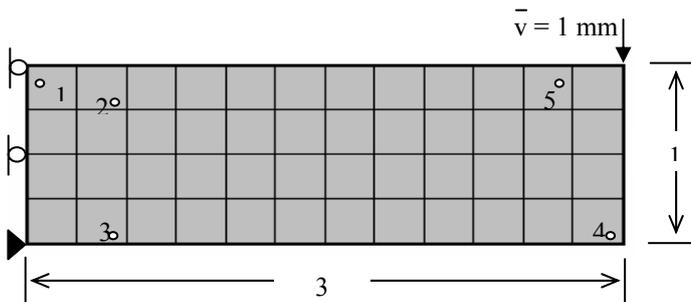


Figure 4.12 : Maillage et conditions aux limites

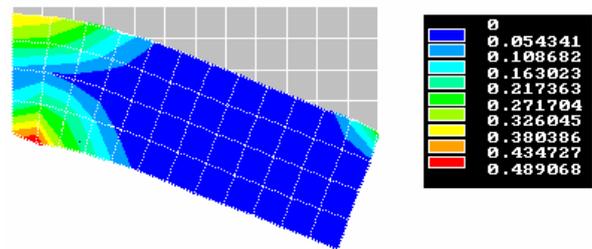


Figure 4.13 : Déformations plastiques équivalentes

## RÉFÉRENCES

- [1] Clough R.W., *The finite element in plan stress analysis*, Proc. ASCE conf. on electronic computation, (1960).
- [2] Marçal P.V. and King I.P., *Elastic plastic analysis of two dimensional stress systems by the finite element method*. Num. Meth. Ind. Form. Swansea., V.9 (1967).
- [3] Hibbitt H.D., Marçal P.V. and Rice J.R., *A finite element formulation for problems of large strain and large displacement*. Int. J. Solides Struc., V.6,1069-1086 (1970).
- [4] McMeeking R.M. and Rice J.R., *Finite element formulation for problems of large elastic-plastic deformation*. Int. J.

- Solids Struct., V.11 (1975).
- [5] Zienkiewicz O.C. and Owen D.R.J., *Analysis of viscoplastic effects in pressure vessels by the finite element method*. Nuclear Engn. Des., V.28 (1974).
- [6] Golinval J.C., *Calcul par éléments finis de structures élasto-viscoplastique soumises à des chargements cycliques à haute température*. Thèse de doctorat de l'Université de Liège, (1989).
- [7] EL Mouatassim M., *Modélisation en grandes transformations des solides massifs par éléments finis*. Thèse de doctorat de l'Université de Technologie de Compiègne, France, (1989).
- [8] Ponthot J.Ph., *Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat de l'Université de Liège, (1995).
- [9] Nagtegaal J.C., *On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems*, Comp. Methods Appl. Mech. Eng., Vol.33, 469-484 (1982).
- [10] Nagtegaal J.C. and De Jong J.E., *Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis*, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.17 (1981).
- [11] Hughes T.J.L. and Winget J., *Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis*, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.15, 1862-1867 (1980).
- [12] Wilkins M.L., *Calculation of elastoplastique flaws*, in « Methods in Computational Physics » B. Alder (eds), Academic press (1964).
- [13] Krieg R.D. and Krieg B.D., *Accuracies of numerical solution method for the elastic-perfectly plastic model*, ASME, J. Pressure Vessels and Piping Div. Vol.99, 510-515 (1977).
- [14] Simo J.C. and Taylor R.L., *Consistent tangent operator for rate-independant elasto-plasticity*, Comp. Methods Appl. Mech. Eng., Vol.48, 101-118 (1985).
- [15] Armstrong P.S. and Frederick C.O., *A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect*, C.E.G.B. Repport RD/B/N731, (1966).
- [16] Chaboche J.L., *Description thermodynamique et phénoménologique de la viscoplasticité cyclique avec endommagement*, Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Paris VI, (1978).
- [17] De Saxcé G., *Une généralisation de l'inégalité de Fenchel et ses applications aux lois constitutives*, C.R.A.S., Paris, t314, série II, 125-129, (1992).
- [18] De Saxcé G. et Hjjaj M., *Sur l'intégration numérique de la loi d'érouissage cinématique non linéaire*, 3<sup>ème</sup> Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France, vol .II, 773-778, (20-23 Mai 1997).
- [19] Simo J.C. and Taylor R.L., *A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity*, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.22, 649-670 (1986).
- [20] Malvern L.E., *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1969).
- [21] Sidoroff F., *Cours sur les grandes déformations*, Rapport GRECO N°51 (1982).
- [22] Gélin J.C., Oudin J. et Ravalard Y., *Schémas numériques en grandes déformations plastiques*, Rapport GRECO N°135 (1984).
- [23] Gélin J.C., *Modèles numériques et expérimentaux en grandes déformations plastiques et endommagement de rupture ductile*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université P. et M. Curie, Paris 6 (1985).
- [24] Dafalias Y. F., *A missing link in the macroscopic constitutive formulation of large plastic deformation*. Plasticity today, Modelling and Applications (1983).
- [25] Godinas A., *Calcul des gradients de vitesse constants au cours d'un pas*. Note interne, Service de Mécanique des Matériaux, Université de Liège, Belgique (1984).
- [26] Nagtegaal J.C. and Veldpaus F.E., *On the implementation of finite strain plasticity equations in a numerical model*, Numerical analysis of forming processes, Pittman *et al.* (Eds.), John Wiley & Sons, 351-371 (1984).
- [27] Braudel J.H., *Modélisation des grandes transformations élastoplastiques d'un solide isotrope par la méthode des éléments finis*, Thèse de doctorat d'Etat ès Sciences, Université Claude Bernard, Lyon 1, France, (1986).
- [28] Braudel J.H. Abouaf M and Chenot J.L., *An implicit and incrementally objective formulation for the solution of elastoplastic problems at finite strain by the F.E.M.*, Rapport GRECO, N°152, (1985).
- [29] Feng Z.Q., *Contribution à la modélisation des problèmes non linéaires : contact, plasticité et endommagement*. Thèse de Doctorat de l'Université de Technologie de Compiègne, France, (1991).

## Chapitre 5 MODELISATION DE LA MISE EN FORME DES MATERIAUX EN GRANDES DEFORMATIONS RIGIDE-VISCOPLASTIQUES

Ce chapitre est consacré à la modélisation numérique de problèmes de mise en forme de métaux. On se place dans le cadre de la mécanique des solides en grandes déformations rigide-viscoplastiques. A partir du principe variationnel de Hill, on peut obtenir, d'une façon explicite, une formulation des éléments finis. La méthode des multiplicateurs de Lagrange est utilisée afin de tenir compte de la condition d'incompressibilité plastique. Les problèmes de contact et de frottement entre solides sont pris en compte par une méthode de prédiction-corrrection. Une procédure itérative est utilisée pour la résolution du système d'équations non linéaires. La compression d'un lopin axisymétrique et le forgeage d'un disque ont été simulés par la méthode proposée. Les résultats sont comparés à l'expérience et aux prévisions d'un modèle analytique.

### 5.1 INTRODUCTION

Les procédés de mise en forme (laminage, emboutissage, filage, extrusion,...) des pièces mécaniques sont très présents dans l'industrie actuelle. La modélisation de ces procédés présente de nombreuses difficultés. Celles-ci proviennent des multiples non-linéarités mécaniques telles que : les non-linéarités matérielles dues à la loi de comportement du solide; les non-linéarités géométriques qui se manifestent lorsqu'apparaissent des grands déplacements, des grandes rotations et déformations; les non-linéarités liées à l'évolution des conditions aux limites comme dans les problèmes de contact et de frottement entre solides. Comme ces procédés sont très complexes, il est difficile de les traiter par des méthodes analytiques. Dans ce chapitre, on présente principalement une étude numérique des procédés de mise en forme par la méthode des éléments finis. Un modèle analytique est également présenté à titre comparatif. Lors de la mise en forme des métaux en grandes déformations, les déformations élastiques sont beaucoup plus faibles que les déformations plastiques et peuvent souvent être négligées. Ceci simplifie les formulations des éléments finis et les procédures d'intégration des lois de comportement par rapport aux formulations élasto-plastiques qui ont été présentées au chapitre 4. Pour traiter les problèmes de mise en forme de métaux, la méthode des éléments finis rigide-plastiques a été utilisée par Mori *et al.* [MOR 82], Kim *et al.* [KIM 85], Yoon *et al.* [YOO 88], Feng et De Saxcé [FEN 96]. On présente dans ce chapitre une méthode des éléments finis rigide-viscoplastiques. Comme la méthode rigide-plastique, cette méthode utilise souvent des formulations en vitesse (analogues à celles de la mécanique des fluides). La configuration actuelle est obtenue par intégration de la vitesse, ce qui permet d'éviter les non-linéarités géométriques. Cette méthode est donc très commode pour traiter les problèmes de mise en forme en régime stationnaire ou non stationnaire.

La condition d'incompressibilité plastique est introduite dans la formulation variationnelle par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Des formulations par éléments finis correspondantes ont été développées dans ce chapitre.

L'analyse des problèmes de contact avec frottement revêt une grande importance dans de nombreuses applications de mise en forme de métaux pour lesquelles le contact entre solides déformables et les outils rigides ou déformables joue un rôle prédominant. Le contact entre deux (ou même plusieurs) solides déformables se produit d'ailleurs dans de nombreux problèmes mécaniques. Ces processus engendrent le plus souvent de grandes déformations et des déplacements relatifs importants entre le milieu déformé et les outils.

Les phénomènes de contact et de frottement sont représentés par des inéquations non linéaires qui font intervenir les déplacements (ou vitesses de déplacement) d'une partie de la frontière, et les réactions de contact. Ces réactions et les surfaces en contact sont inconnues à priori.

Les lois de frottement couramment utilisées dans le domaine de la mise en forme sont celle de Coulomb ou de Tresca qui peuvent décrire le contact adhérent ou glissant. Le contact avec lubrifiant exige parfois l'utilisation d'autres lois plus complexes comme on peut le constater à la lecture des travaux de Oden et Pires [ODE 83]. Lors de travaux antérieurs [SAX 91] [FEN 92] [FEN 93] [FEN 95], nous avons développé des méthodes robustes et utiles à la résolution de problèmes de contact avec frottement et situées dans un contexte général.

### 5.2 HYPOTHESES ET LOI DE COMPORTEMENT

La formulation de la loi de comportement des matériaux relatives aux procédés de mise en forme, est souvent très complexe. Pour faciliter le traitement mathématique, on suppose que:

- a) les déformations élastiques et les forces volumiques sont négligeables au regard des déformations plastiques et des efforts de mise en forme,
- b) les matériaux sont isotropes et homogènes,
- c) la théorie de Lévy-Mises décrit l'écoulement des matériaux,

On adopte la formulation eulérienne pour décrire les mouvements des particules matérielles du milieu. D'après la théorie de Lévy-Mises, la loi d'écoulement plastique s'écrit :

$$s_{ij} = \phi \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (1)$$

où  $\phi$  est une fonction scalaire qui, dans le cas rigide-viscoplastique, est égale à :

$$\phi = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}}$$

avec  $\begin{cases} \bar{\sigma} < \kappa & \text{comportement rigide} \\ \bar{\sigma} \geq \kappa & \text{comportement viscoplastique} \end{cases}$

où  $\bar{\sigma}$  : contrainte équivalente au sens de Von Mises,  
 $\kappa$  : limite d'écoulement initiale,  
 $s_{ij}$  : composantes du tenseur déviateur des contraintes,  
 $\dot{\varepsilon}_{ij}$  : composantes du tenseur taux de déformation,  
 $\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}}$  : taux de déformation équivalente au sens de Von Mises.

Pour tenir compte de l'écrouissage isotrope non linéaire et de la sensibilité à la vitesse de déformation, on a choisi pour la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  une fonction empirique non linéaire de la déformation équivalente  $\bar{\varepsilon}$  et du taux de déformation équivalente  $\dot{\varepsilon}$  de la forme :

$$\bar{\sigma} = \kappa (1.0 + a \bar{\varepsilon})^b \left[ 1.0 + \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{r} \right)^m \right] \quad (2)$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $r$ , et  $m$  représentent des constantes caractéristiques du matériau.

On remarque que si  $r \rightarrow \infty$ , on retrouve le modèle rigide-plastique. Par ailleurs, il est intéressant de noter que Zienkiewicz *et al.* [ZIE 78] ont traité la mise en forme de métaux viscoplastiques sous la forme d'écoulements de fluides non-newtoniens.

### 5.3 PRINCIPE VARIATIONNEL

Considérons un milieu continu  $\Omega$  de frontière  $S$ , soumise à une densité surfacique d'efforts extérieurs  $\mathbf{T}$  sur  $S_1$ , et à un champ de vitesses de déplacement imposé sur  $S_0$  tel que  $S_1 \cap S_0 = S$ . Le principe variationnel de Hill [HIL 56] exprime que, parmi tous les champs de vitesses cinématiquement admissibles, la solution exacte doit minimiser la fonctionnelle suivante :

$$\Pi = \int_{\Omega} E(\dot{\varepsilon}_{ij}) d\Omega - \int_{S_1} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} dS \quad (3)$$

avec la condition d'incompressibilité plastique imposée à  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  :

$$\dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \quad (4)$$

où  $\mathbf{v}$  : vecteur vitesse,  
 $\dot{\varepsilon}_{ij}$  : taux de déformation,  
 $\dot{\varepsilon}_{ii}$  : taux de déformation volumique,  
 $E(\dot{\varepsilon}_{ij})$  : travail interne de déformation.

$$E(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \int_0^{\dot{\varepsilon}_{ij}} s_{ij} d\dot{\varepsilon}_{ij} = \int_0^{\dot{\varepsilon}} \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon} \quad (5)$$

En introduisant (2) dans (5) et après intégration, on obtient :

$$E(\dot{\varepsilon}_{ij}) = Y \left[ \frac{\dot{\varepsilon}}{r} + \frac{1}{(m+1)r^m} \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{r} \right)^{m+1} \right] \quad (6)$$

où

$$Y = \kappa (1.0 + a \bar{\varepsilon})^b$$

Ce principe conduit à la résolution d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle sous contraintes. En pratique, il est difficile de trouver un champ de vitesse qui satisfasse à la fois les conditions aux limites et la condition d'incompressibilité. L'idée est d'introduire (4) dans (3) et d'établir une nouvelle fonctionnelle. Le problème de minimisation sous contraintes est donc remplacé par un problème de minimisation sans contraintes. Pour ce faire, la méthode des multiplicateurs de Lagrange peut être utilisée. Ainsi, en introduisant le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ , la nouvelle fonctionnelle s'écrit :

$$\Pi_L = \int_{\Omega} Y \left[ \dot{\bar{\varepsilon}} + \frac{1}{(m+1)r^m} \left( \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\varepsilon}} \right)^{m+1} \right] d\Omega + \int_{\Omega} \lambda \dot{\varepsilon}_{ii} d\Omega - \int_{S_f} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} dS \quad (7)$$

On peut prouver que le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  s'interprète physiquement comme la contrainte hydrostatique.

#### 5.4 DISCRETISATION ET FORMULATION DES ELEMENTS FINIS

Dans le contexte des éléments finis [DHA 81], les vitesses de déplacement nodales  $\mathbf{v}_n$  sont des inconnues. Le vecteur des vitesses dans un élément "n" est obtenu par interpolation des  $\mathbf{v}_n$  :

$$\mathbf{v} = \mathbf{N} \mathbf{v}_n \quad (8)$$

où  $\mathbf{N}$  est la matrice des fonctions de forme.

Le taux de déformation est :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \mathbf{L} \mathbf{v} = \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{v}_n = \mathbf{B} \mathbf{v}_n \quad (9)$$

où  $\mathbf{L}$  est l'opérateur du gradient symétrisé.

Le taux de déformation volumique est :

$$\dot{\varepsilon}_{ii} = \mathbf{C} \dot{\varepsilon}_{ij} = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{v}_n \quad (10)$$

où  $\mathbf{C} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{pour le cas axisymétrique} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{pour le cas de déformation plane} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{pour le cas tri - dimensionnel} \end{cases}$

Supposons que la contrainte hydrostatique est constante dans un élément, nous pouvons donc écrire la fonctionnelle d'un élément "n" sous forme matricielle :

$$\Pi_L^n = G_1^n + \lambda^n G_2^n + G_T^n \quad (11)$$

où  $G_1^n = \int_{\Omega^n} Y \left[ \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{v}_n^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{v}_n} + \frac{1}{(m+1)r^m} \left( \frac{2}{3} \mathbf{v}_n^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{v}_n \right)^{\frac{m+1}{2}} \right] d\Omega$

$$G_2^n = \int_{\Omega^n} \mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{v}_n d\Omega$$

$$G_T^n = - \int_{S_f^n} \mathbf{T}^T \mathbf{N} \mathbf{v}_n dS$$

La fonctionnelle totale est obtenue par assemblage :

$$\Pi_L = \sum_{n=1}^{NELT} \Pi_L^n = \Pi_L(\mathbf{V}, \boldsymbol{\lambda}) \quad (12)$$

où

$$\mathbf{V} = [v_{1x} \ v_{1y} \ v_{1z} \ v_{2x} \ v_{2y} \ v_{2z} \ \dots \ v_{Nx} \ v_{Ny} \ v_{Nz}]^T$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_{NELT}]^T$$

NELT représente le nombre total d'éléments et N le nombre total de noeuds.

D'après le principe variationnel, on a :

$$\begin{aligned}\delta\Pi_L &= \sum_{n=1}^{\text{NELT}} \left( \frac{\partial\Pi_L^n}{\partial\mathbf{v}_n} \delta\mathbf{v}_n + \frac{\partial\Pi_L^n}{\partial\lambda_n} \delta\lambda_n \right) \\ &= \frac{\partial\Pi_L}{\partial\mathbf{V}} \delta\mathbf{V} + \frac{\partial\Pi_L}{\partial\boldsymbol{\lambda}} \delta\boldsymbol{\lambda} = 0\end{aligned}\quad (13)$$

Comme les variations  $\delta\mathbf{V}$  et  $\delta\boldsymbol{\lambda}$  sont arbitraires, on obtient alors :

$$\frac{\partial\Pi_L}{\partial\mathbf{V}} = \sum_{n=1}^{\text{NELT}} \frac{\partial\Pi_L^n}{\partial\mathbf{v}_n} = 0 \quad (14a)$$

$$\frac{\partial\Pi_L}{\partial\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{n=1}^{\text{NELT}} \frac{\partial\Pi_L^n}{\partial\lambda_n} = 0 \quad (14b)$$

En dérivant la fonctionnelle  $\Pi_L^n$  (Eq.11) par rapport à  $\mathbf{v}_n$  et  $\lambda_n$ , on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Pi_L^n}{\partial\mathbf{v}_n} &= \int_{\Omega^n} Y \left[ \frac{\frac{2}{3} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{v}_n}{\sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{v}_n^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{v}_n}} + \frac{2\mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{v}_n}{3r^m} \left( \frac{2}{3} \mathbf{v}_n^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{v}_n \right)^{\frac{m-1}{2}} \right] d\Omega \\ &\quad + \lambda_n \int_{\Omega^n} \mathbf{B}^T \mathbf{C} d\Omega - \int_{S_f^n} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS \\ &= Y \mathbf{H} \mathbf{v}_n + \lambda_n \mathbf{Q} - \mathbf{F}\end{aligned}\quad (15a)$$

$$\frac{\partial\Pi_L^n}{\partial\lambda_n} = \int_{\Omega^n} \mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{v}_n d\Omega = \mathbf{Q}^T \mathbf{v}_n \quad (15b)$$

où

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega^n} \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{\frac{2}{3}} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}}{r^m} \right] \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\Omega$$

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega^n} \mathbf{B}^T \mathbf{C} d\Omega$$

$$\mathbf{F} = \int_{S_f^n} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS$$

Après assemblage de tous les éléments, le système d'équations (14) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\Pi_L}{\partial\mathbf{V}} \\ \frac{\partial\Pi_L}{\partial\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\text{NELT}} Y \mathbf{H} & \sum_{n=1}^{\text{NELT}} \mathbf{Q} \\ \sum_{n=1}^{\text{NELT}} \mathbf{Q}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\text{NELT}} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (16)$$

Soit  $\mathbf{R}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$  (17)

$\mathbf{R}$  est le vecteur des résidus.  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  et  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  sont respectivement les vecteurs de forces internes et extérieures. La minimisation de

la fonctionnelle conduit alors à un système d'équations non linéaires dont les inconnues sont les vitesses aux noeuds et les pressions aux éléments du maillage. En utilisant la méthode itérative de Newton-Raphson pour la résolution de ce système, on peut obtenir les formulations par éléments finis (matrice de rigidité tangente et vecteur des résidus):

$$[\mathbf{K}_T]^{i-1} \{\mathbf{d}\}^i = -\{\mathbf{R}\}^{i-1} \quad (18)$$

où  $\{\mathbf{d}\} = [\Delta \mathbf{V} \ \lambda]^T$

$$[\mathbf{K}_T] = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{NELT} \frac{\partial^2 \Pi_L^n}{\partial \mathbf{v}_n \partial \mathbf{v}_n^T} & \sum_{n=1}^{NELT} \frac{\partial^2 \Pi_L^n}{\partial \lambda_n \partial \mathbf{v}_n^T} \\ \sum_{n=1}^{NELT} \frac{\partial^2 \Pi_L^n}{\partial \mathbf{v}_n \partial \lambda_n} & \sum_{n=1}^{NELT} \frac{\partial^2 \Pi_L^n}{\partial \lambda_n \partial \lambda_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{NELT} \mathbf{Y} \mathbf{P} + \mathbf{D} & \sum_{n=1}^{NELT} \mathbf{Q} \\ \sum_{n=1}^{NELT} \mathbf{Q}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\{\mathbf{R}\} = \begin{Bmatrix} \sum_{n=1}^{NELT} \mathbf{Y} \mathbf{H} \mathbf{v}_n - \mathbf{F} \\ \sum_{n=1}^{NELT} \mathbf{Q}^T \mathbf{v}_n \end{Bmatrix} \quad (20)$$

où

$$\mathbf{P} = \frac{2}{3} \int_{\Omega^n} \frac{1}{\dot{\varepsilon}} \left( \mathbf{B}^T \mathbf{B} - \frac{2 \mathbf{b} \mathbf{b}^T}{\dot{\varepsilon}^2} \right) d\Omega$$

$$\mathbf{D} = \frac{2}{3} \int_{\Omega^n} \frac{\dot{\varepsilon}^{m-1}}{r^m} \left( \mathbf{B}^T \mathbf{B} + \frac{2(m-1)}{3} \frac{\mathbf{b} \mathbf{b}^T}{\dot{\varepsilon}^2} \right) d\Omega$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{v}_n$$

Le champ de vitesses est actualisé à chaque itération par:

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{v}^{i-1} + \alpha \Delta \mathbf{v}^i \quad (21)$$

où  $\alpha$  est choisi pour assurer la convergence dont le critère s'écrit en termes de variation relative de vitesse ou de résidus:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{V}\|}{\|\mathbf{V}\|} \leq \text{Tol}; \quad \|\mathbf{R}\| \leq \text{Tol} \quad (22)$$

où Tol est une constante très faible (typiquement, Tol  $\approx$  0.000001 à 0.001).

Dans leur grande majorité, les procédés de mise en forme font intervenir des phénomènes d'écoulement de type transitoire. Dans le cas présent, on adopte une description dite "Lagrangienne réactualisée" :

- on se place à l'instant donné t;
- à l'aide des conditions aux limites (vitesse des outils sur  $S_0$ , par exemple) et des formulations précédentes, on calcule un champ de vitesses  $\mathbf{V}_t$ ;
- à l'aide de ce champ, on évolue un pas de temps  $\Delta t$  donnant une déformation acceptable et compatible avec l'arrivée en contact de certains noeuds ;
- on réactualise alors la géométrie à l'aide de ce pas de temps :

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t} = \mathbf{X}_t + \Delta t \mathbf{V}_t \quad (23)$$

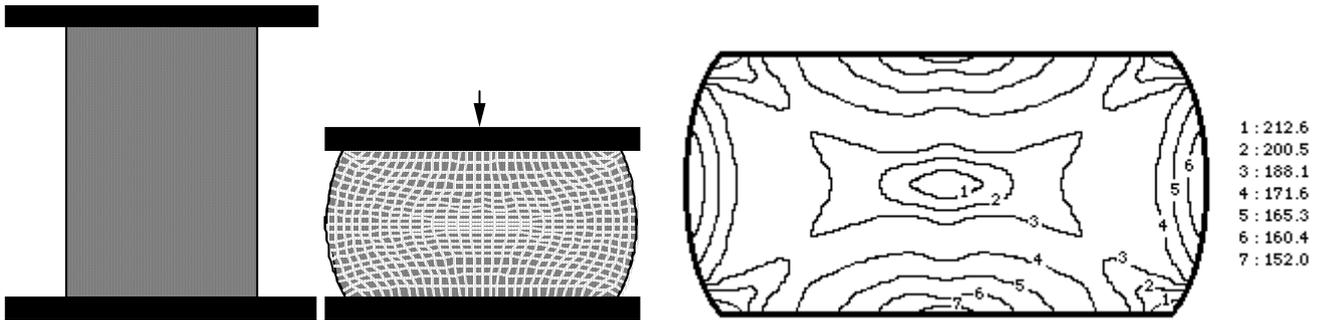
On recommence ainsi le calcul jusqu'à la fin de l'opération de mise en forme. Simuler l'ensemble du procédé revient donc à résoudre un certain nombre de problèmes pseudo-stationnaire. Cette approche dite "explicite" est également utilisée dans les

logiciels de calcul tels que FORGE2 et FORGE3 [DUC 93].

## 5.5 APPLICATION NUMERIQUE

### 5.5.1 Forgeage d'un lopin axisymétrique

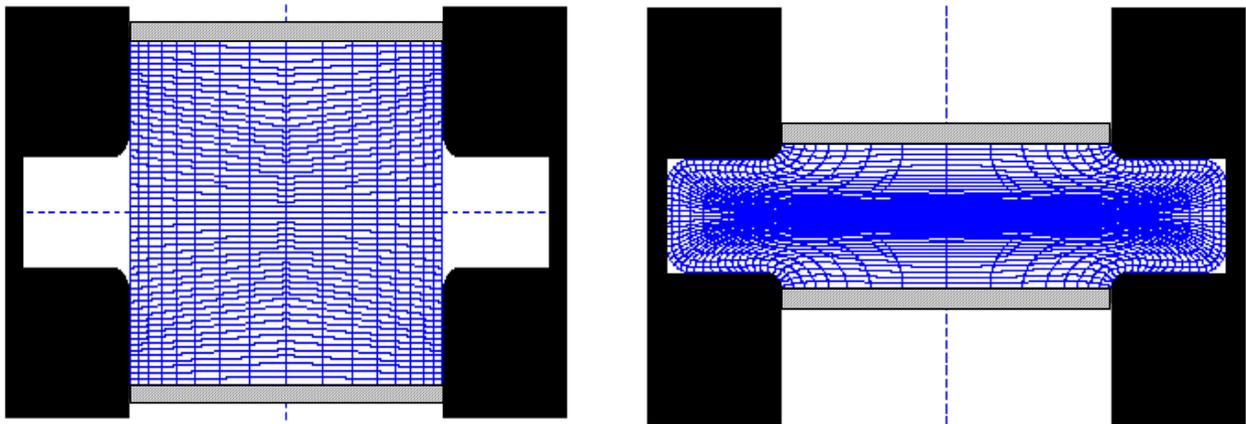
On considère à titre d'exemple, un lopin de diamètre initial  $\Phi_0 = 60$  mm et de hauteur  $H_0 = 90$  mm, forgé de façon quasi statique entre deux tas rigides. Le contact et le frottement seront pris en compte dans cet exemple. On considère le cas où le coefficient de frottement ( $\mu$ ) vaut 0.4. En raison de la symétrie, on ne traite par le calcul, que le quart du lopin. Le maillage d'un quart du lopin comporte 176 nœuds dont 18 candidats au contact, et 150 éléments axisymétriques. Chaque élément comporte 4 nœuds et 4 points d'intégration. Afin de comparer les résultats numériques avec ceux du modèle analytique, on choisit les constantes du matériau suivantes :  $a=b=0$ ,  $r=1$ ,  $n=0.1$  et  $\kappa=200$  N/mm<sup>2</sup>. La figure 5.1 montre la configuration initiale et déformée pour le lopin entier. Le champ de contraintes équivalentes au sens de Von Mises est illustré figure 5.2. On remarque de fortes concentrations de contraintes au centre et aux bords du lopin.



**Figure 5.1 :** Forgeage quasi statique d'un lopin axisymétrique jusqu'à mi-hauteur **Figure 5.2 :** Contrainte équivalente (MPa)

### 5.5.2 Forgeage d'un disque axisymétrique

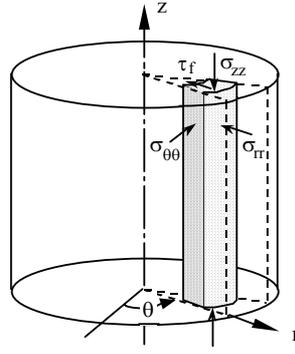
Le deuxième exemple concerne le forgeage d'un disque et constitue un test plus sévère que le précédent notamment en ce qui concerne le calcul des déformations et la résolution du problème de contact. Un lopin cylindrique placé dans un conteneur est sollicité par deux tas se rapprochant du centre de symétrie à la même vitesse. Les tas et le conteneur présentent donc une symétrie de révolution et sont supposés rigides. Les figures 5.3 et 5.4 montrent respectivement les maillages initial et déformé.



**Figure 5.3 :** Forgeage d'un disque : maillage initial **Figure 5.4 :** Forgeage d'un disque : maillage déformé

## 5.6 APPROCHE ANALYTIQUE RELATIVE AU FORGEAGE D'UN LOPIN AXISYMETRIQUE

Le problème, classique en mise en forme [BAQ 73] est traité par la méthode des tranches, en tenant compte de la loi de frottement de Tresca et en négligeant le phénomène de bombement (Figure 5.5). Dans la présente étude, on considéra, de plus, un comportement du matériau de type viscoplastique décrit par l'équation (2).



**Figure 5.5 :** Tranche sollicitée dans un lopin axisymétrique

L'équilibre d'une tranche est formulé par la relation suivante:

$$\sigma_{rr} + r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} - \sigma_{\theta\theta} - \frac{2r}{h} \tau_f = 0 \quad (24)$$

où h désigne la hauteur instantanée du lopin et  $\tau_f$  la cession de frottement obéissant à la relation dite de Tresca :

$$\tau_f = \mu \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \quad (25)$$

La condition d'écoulement plastique s'écrit:

$$\sqrt{J_2} = \bar{\sigma} \quad (26)$$

où  $J_2$  représente le deuxième invariant du déviateur des contraintes, et  $\bar{\sigma}$  la contrainte d'écoulement plastique. Nous faisons l'hypothèse que le champ de contraintes est tel que:  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$  (27)

Par combinaison des équations (24), (26) et (27) on obtient l'effort de forgeage:

$$T = \int_S |\sigma_{zz}| ds = \pi R^2 \bar{\sigma} \left[ 1 + \frac{m}{3\sqrt{3}} \frac{2R}{h} \right] \quad (28)$$

En considérant une loi de comportement viscoplastique et par réduction de l'expression (2) on obtient:

$$\bar{\sigma} = \kappa (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})^n \quad (29)$$

ainsi que les relations géométriques suivantes:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{zz} = \frac{v}{h} \quad (30a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{zz} = \ln \left( \frac{h}{H_0} \right) \quad (30b)$$

$$R = R_0 \sqrt{\frac{H_0}{h}} \quad (30c)$$

En combinant les relations (28), (29) et (30) on trouve l'expression de l'effort de forgeage en fonction de la déformation:

$$T = \kappa \Omega v^n \left( H_0 e^{\boldsymbol{\varepsilon}_{zz}} \right)^{(1+n)} \left( 1 + \frac{\mu}{\sqrt{3}} \frac{\Phi_0}{H_0} e^{-3\boldsymbol{\varepsilon}_{zz}/2} \right) \quad (31)$$

où  $\Omega$  représente le volume du lopin, et v la vitesse de déplacement imposée au tas supérieur. On retrouve, dans l'expression (31) l'effet du couplage frottement - élancement montrant que lorsque l'élancement initial ( $\Phi_0/H_0$ ) tend vers l'infini, l'effort T tend vers une valeur traduisant le comportement rhéologique uniaxial du matériau. La figure 5.6 illustre les résultats expérimentaux obtenus sur un matériau modèle (plasticine) ainsi que les prévisions issues du calcul par éléments finis et de la relation analytique (31). On observe une bonne cohérence entre les résultats obtenus par les trois méthodes.

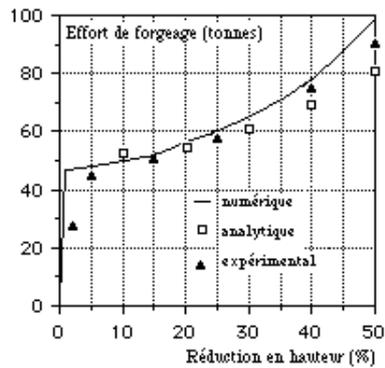


Figure 5.6 : Effort de forgeage

## 5.7 CONCLUSION

Dans le présent chapitre nous avons présenté une formulation concrète et complète des éléments finis rigide-viscoplastiques destinée à l'analyse de procédés de mise en forme des métaux ou d'autres milieux incompressibles et viscoplastiques. Cette formulation en vitesse, à la fois pour les lois constitutives des matériaux et pour les lois du contact avec frottement, a été appliquée au cas particulier du forgeage d'un lopin et d'un disque axisymétriques. Des résultats analytiques sont également présentés à titre comparatif. Les résultats numérique, analytique et expérimentaux sont confrontés et révèlent une certaine convergence dans les deux cas traités.

Un algorithme d'intégration implicite dans l'analyse de la mise en forme de métaux a été développé et a fait l'objet d'une publication dans European Journal of Mechanics, A/Solids, Vol.15, 51-66, (1996) [FEN96].

## REFERENCES

- [BAQ 73] Baqué P., Felder E., Hyafil J. et Descatha Y., "Mise en forme des métaux; calculs par la plasticité", Tome 2, Edt. DUNOD, Paris, 59-52, (1973)
- [DHA 81] Dhatt G. et Touzot G., "Une présentation de la méthode des éléments finis", Edt. Maloine, Paris (1981)
- [DUC 93] Ducloux, Gratacos et Coupez, "Simulation tridimensionnelle du forgeage à chaud (FORGE3)", Actes STRUCOME, Paris, 545-554, (8-10 Décembre 1993)
- [FEN 92] Feng Z.Q. and Touzot G., "Analysis of two and three dimensional contact problems with friction by a mixed finite element method", Revue Euro. Eléments Finis, **1**, 441-459 (1992)
- [FEN 93] Feng Z.Q., Aazizou K. et Hourlier F., "Modélisation des problèmes de contact avec frottement - Implantation en C++ dans le code ZéBuLoN", Proc. Colloque National en Calcul des Structures, Edt. HERMES, pp.1141-1156, Giens, France, (11-14 Mai 1993)
- [FEN 96] Feng Z.Q. and De Saxcé G., "Rigid-plastic implicit integration scheme for analysis of metal forming", European Journal of Mechanics, A/Solids, Vol.15, 51-66, (1996)
- [FEN 95] Feng Z.Q., "2D or 3D frictional contact algorithms and applications in a large deformation context", Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, 409-416 (1995)
- [HIL 56] Hill R., "New horizons in mechanics of solids", J. Mech. Phys. of Solids, **5**, 66 (1956)
- [KIM 85] Kim Y.J. and Yang D.Y., "A formulation for rigid-plastic finite element method considering work-hardening effect", Int. J. Mech. Sci., **27**, 487-495 (1985)
- [MOR 82] Mori K., Osakada K. and Oda T., "Simulation of plane strain rolling by the rigid-plastic finite element method", Int. J. Mech. Sci., **24**, 519 (1982)
- [ODE 83] Oden J.T. and Pires E.B., "Non local and non linear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity", J. Appl. Mech. **50**, 421-432 (1983)
- [SAX 91] De Saxcé G. and Feng Z.Q., "New inequality and functional for contact with friction: The implicit standard material approach", Mech. Struct. & Mach., **19**, 301-325 (1991)
- [YOO 88] Yoon J.H. and Yang D.Y., "Rigid-plastic finite element analysis of three dimensional forging by considering friction on continuous curved dies with initial guess generation", Int. J. Mech. Sci. **30**, 887-898 (1988)
- [ZIE 78] Zienkiewicz O.C., Jain P.C and Onate E. "Flow of solids during forming and extrusion, some aspects of numerical solutions", Int. J. Solids Struct., **14**, 15 (1978)

## 6.1 INTRODUCTION

Depuis que Hertz a introduit une théorie du contact en 1881, de nombreux problèmes d'ingénieur faisant intervenir le contact ont été résolus. L'outil de calcul basé sur une approche analytique, est limité à la résolution des problèmes simples de contact : en effet la plupart des solutions analytiques supposent un contact sans frottement et des zones de contact connues, a priori, et des formes géométriques simples. Le développement des techniques numériques de résolution a permis de traiter des problèmes de contact plus complexes. La méthode des éléments finis, en permettant la discrétisation des solides de formes quelconques et la prise en compte aisée de conditions aux limites diverses, offre un outil puissant de calcul pour étudier les problèmes de contact.

Aujourd'hui l'analyse des problèmes de contact avec frottement est très importante pour beaucoup d'applications d'ingénierie industrielle. La modélisation des procédés industriels de mise en forme, et plus généralement des phénomènes complexes où le contact et le frottement s'ajoutent à des non-linéarités du matériau et de la géométrie, nécessite des algorithmes supplémentaires dans les logiciels généraux d'éléments finis.

Malgré la linéarité de la loi élastique, le problème de contact est intrinsèquement non-linéaire. En effet, la surface de contact et les forces de contact sont, a priori, inconnues et elles changent progressivement lorsqu'on applique le chargement externe.

Dans la littérature, de nombreuses méthodes ont été développées pour résoudre les problèmes de contact par des méthodes numériques comme la méthode des éléments finis, parmi lesquels la méthode de pénalisation [1-5], la méthode de flexibilité [6-8], la méthode de programmation mathématique [9-13], la méthode des multiplicateurs de Lagrange [14,15]. Une grande partie de ces articles traitent d'algorithmes numériques. Dans les codes aux éléments finis industriels (ANSYS, PAM-CRASH...), les problèmes de contact avec frottement dans le contexte des grandes déformations sont presque exclusivement traités par des méthodes de pénalisation ou de régularisation. Ces méthodes présentent des inconvénients en ce qui concerne la stabilité et la précision numérique, en particulier pour tout ce qui touche à la simulation des phénomènes de frottement.

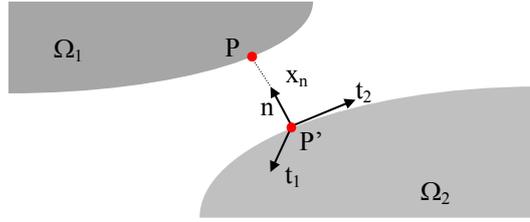
Pour pallier ces insuffisances, une méthode du Lagrangien Augmenté a été développée par Curnier et Alart [16,17]. Cette méthode consiste à déterminer les inconnues (déplacement et réaction) simultanément en utilisant un algorithme de Newton généralisé. Simo et Laursen [18] ont également proposé une méthode similaire. En collaboration avec le Professeur Géry De Saxcé, nous avons proposé une méthode bipotentielle fondée sur la théorie MSI (Matériau Standard Implicite) [19], dans laquelle une nouvelle formulation du lagrangien augmenté est développée. Pour les problèmes de contact unilatéral avec frottement, la méthode bipotentielle n'utilise qu'un seul principe variationnel sur le déplacement et une seule inégalité. Ainsi, le contact unilatéral et le frottement sont couplés. Cette nouvelle approche étend également la notion de loi normale aux comportements dissipatifs non associés, en tenant compte du frottement. Cette approche variationnelle est plus simple que l'approche classique qui inclue deux principes variationnels et deux inégalités respectivement pour le contact unilatéral et le frottement. Dans la méthode bipotentielle, le problème de contact avec frottement est traité dans un système réduit par un algorithme d'Uzawa à une seule phase de prédiction-corrrection sur le cône de frottement. L'extension de cette méthode dans le contexte de grandes déformations a été réalisé dans [20].

Pour être capable de traiter des problèmes d'intérêt industriel qui font intervenir le contact, il est important de disposer d'un éventail d'algorithmes afin de pouvoir moduler l'utilisation de chaque méthode selon leurs avantages et inconvénients dans chaque cas concret. Un autre point important est d'avoir une organisation informatique à la fois simple, et en même temps suffisamment générale et souple. Un logiciel de calcul **FER/Contact** a été développé en tenant compte de ces différentes considérations. Beaucoup d'applications ont montré que cette méthode est fiable et efficace.

Dans les différents paragraphes de ce chapitre, nous allons tout d'abord présenter une synthèse de la méthode bipotentielle et les algorithmes numériques. Les lecteurs sont invités à consulter [23, 24] pour plus de détails. Une méthode de flexibilité ou de changement de statuts a aussi été développée pour traiter les problèmes de contact avec frottement entre deux corps déformables en 2D et 3D [8]. Puis, trois exemples numériques seront également présentés pour illustrer l'efficacité de la stratégie adoptée au cours de ce travail.

## 6.2 LOIS DE CONTACT ET DE FROTTEMENT

Pour des raisons de simplicité et de clarté, nous considérons deux corps déformables  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  en contact en certains points de ses frontières. Soient  $\mathbf{v}$  la vitesse relative locale en un point P de  $\Omega_1$  par rapport à  $\Omega_2$ , et  $\mathbf{r}$  la réaction que subit  $\Omega_1$  de la part de  $\Omega_2$ . Supposons défini  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal dirigé vers  $\Omega_1$ . La projection orthogonale du point P sur la surface de  $\Omega_2$  définit un point P', dit "point projeté de P", qui sera l'origine du repère local  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n})$  (Figure 6.1).



**Figure 6.1 :** Repère local du contact

Le vecteur  $\mathbf{v}$  (resp.  $\mathbf{r}$ ) peut être décomposé en sa partie tangente  $\mathbf{v}_t$  (resp.  $\mathbf{r}_t$ ) et sa partie normale  $\mathbf{v}_n$  (resp.  $\mathbf{r}_n$ ). Compte tenu de la distance initiale au contact  $g$  et pour un pas de temps  $\Delta t$ , la distance  $PP'$  exprimée dans le repère local est alors définie par :  $x_n = g + \Delta t v_n$ . Par conséquent, les conditions de contact unilatéral pour chaque point en contact, peuvent être exprimées comme suit :

- Impénétrabilité  $x_n \geq 0$
- Quand la particule est en contact avec l'obstacle, elle n'est pas attirée par lui :  $x_n = 0 \Rightarrow r_n \geq 0$
- Quand la particule n'est pas en contact avec l'obstacle, la réaction normale est nulle :  $x_n > 0 \Rightarrow r_n = 0$

Ces trois conditions peuvent être condensées sous une forme complémentaire (conditions de Signorini) :

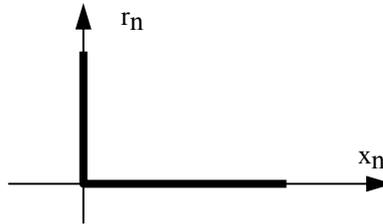
$$x_n \geq 0; \quad r_n \geq 0; \quad x_n r_n = 0 \quad (1)$$

ou sous la forme équivalente [21] :

$$\forall \rho_n > 0 \quad r_n = \text{proj}_{\mathbf{R}^+} (r_n - \rho_n x_n) \quad (2)$$

où  $\mathbf{R}^+$  représente un ensemble de valeurs positives.

La figure 6.2 représente le graphe de cette relation.



**Figure 6.2 :** Graphe des conditions unilatérales

On s'aperçoit que ce n'est pas un graphe d'application, c'est à dire que l'on ne peut écrire la relation ni sous la forme  $x_n = f(r_n)$ , ni sous la forme  $r_n = g(x_n)$ . Cette particularité provoque une grande difficulté à la résolution numérique.

En ce qui concerne les modèles de frottement, il existe beaucoup de choix. Nous avons choisi le modèle de Coulomb, qui est le plus utilisé dans les problèmes de contact avec frottement sec. Dans le cas du contact-frottement isotrope, le modèle de Coulomb s'écrit :

$$\begin{cases} \|\mathbf{r}_t\| < \mu r_n & \text{si } \|\mathbf{v}_t\| = 0 \\ \mathbf{r}_t = -\mu r_n \frac{\mathbf{v}_t}{\|\mathbf{v}_t\|} & \text{si } \|\mathbf{v}_t\| \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

où  $\mu$  désigne le coefficient de frottement et  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne. Dans le calcul numérique, on peut utiliser la forme équivalente :

$$\forall \rho_t > 0 \quad \mathbf{r}_t = \text{proj}_{\mathbf{C}} (\mathbf{r}_t - \rho_t \mathbf{u}_t) \quad (4)$$

où  $\mathbf{C}$  est un ensemble qui représente l'intervalle  $[-\mu r_n, \mu r_n]$  dans le cas bidimensionnel, ou le disque de centre 0 et de rayon  $R = \mu r_n$  dans le cas tridimensionnel.  $\mathbf{u}_t$  désigne la composante tangentielle du déplacement relatif (le glissement).

Le graphe de la relation (4) est un graphe de multi-application, illustré à la figure 6.3.

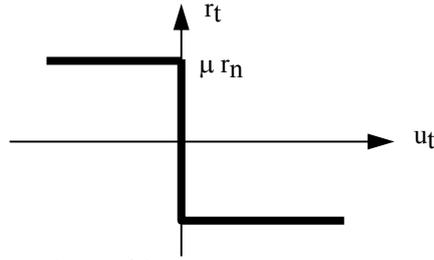


Figure 6.3 : Graphe de la loi de Coulomb

### 6.3 ALGORITHME LOCAL

De manière usuelle, on définit le cône de frottement isotrope de Coulomb pour chaque point en contact :

$$K_\mu = \{ (r_n, \mathbf{r}_t) \in \mathfrak{R}^3 \text{ tels que } \|\mathbf{r}_t\| \leq \mu r_n \} \quad (5)$$

A l'aide de la théorie du Matériau Standard Implicite [19], les conditions de contact unilatéral (1) et la lois de frottement (3) peuvent être exprimées par une seule inégalité variationnelle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\mathbf{r}_t, r_n) \in K_\mu \text{ tels que} \\ \forall (\mathbf{r}_t^*, r_n^*) \in K_\mu ; \quad (x_n - \mu \|\mathbf{v}_t\|) (r_n^* - r_n) + \mathbf{v}_t \cdot (\mathbf{r}_t^* - \mathbf{r}_t) \leq 0 \\ \text{où } -\mathbf{v}_t = \lambda \frac{\mathbf{r}_t}{\|\mathbf{r}_t\|} \exists \lambda > 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

Afin d'éviter des potentiels non différentiables qui apparaissent dans la représentation du contact, on peut utiliser la méthode du lagrangien augmenté. Cette méthode, appliquée à l'inégalité variationnelle, conduit à une équation implicite :

$$\mathbf{r} = \text{proj}_{K_\mu} (r_n + \rho_n(x_n - \mu \|\mathbf{v}_t\|), \mathbf{r}_t + \rho_t \mathbf{v}_t) \quad (7)$$

où  $\rho_n$  et  $\rho_t$  sont des coefficients positifs qui dépendent de la matrice de flexibilité de contact.

Pour résoudre l'équation implicite, on utilise l'algorithme d'Uzawa qui conduit à une procédure itérative comportant les deux étapes suivantes :

$$\begin{array}{l} \text{- prédiction} \\ \left\{ \begin{array}{l} \tau_n^{i+1} = \tau_n^i + \rho_n^i (x_n^i - \mu \|\mathbf{v}_t^i\|) \\ \boldsymbol{\tau}_t^{i+1} = \boldsymbol{\tau}_t^i + \rho_t^i \mathbf{v}_t^i \end{array} \right. \end{array} \quad (8)$$

$$\begin{array}{l} \text{- correction} \\ (\mathbf{r}_n^{i+1}, \mathbf{r}_t^{i+1}) = \text{proj}_{K_\mu} (\tau_n^{i+1}, \boldsymbol{\tau}_t^{i+1}) \end{array} \quad (9)$$

L'étape de la correction peut être graphiquement représentée par la Figure 6.4 pour les trois états possibles de contact : contact avec adhérence ( $\boldsymbol{\tau} \in K_\mu$ ), non contact ( $\boldsymbol{\tau} \in K_\mu^*$ ) et contact avec glissement ( $\boldsymbol{\tau} \in \mathfrak{R}^3 - (K_\mu \cup K_\mu^*)$ ), où  $K_\mu^*$  est le cône dual de  $K_\mu$ .

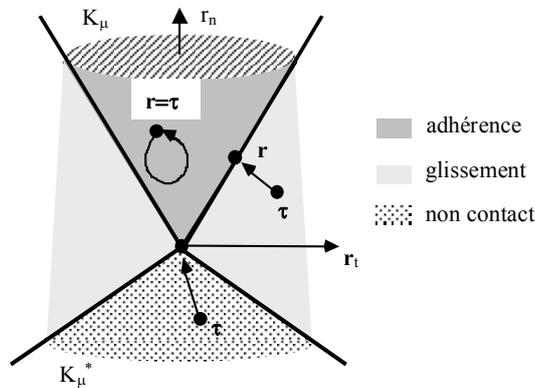


Figure 6.4 : Correction sur le cône de Coulomb

Des formules analytiques de la correction ont été obtenues pour ces trois cas :

- non contact

$$(\mathbf{r}_t^{i+1}, \mathbf{r}_n^{i+1}) = (\mathbf{0}, 0) \quad \text{si } \mu \|\boldsymbol{\tau}_t^{i+1}\| \leq -\tau_n^{i+1} \quad (10)$$

- contact avec adhérence

$$(\mathbf{r}_t^{i+1}, \mathbf{r}_n^{i+1}) = (\boldsymbol{\tau}_t^{i+1}, \tau_n^{i+1}) \quad \text{si } \|\boldsymbol{\tau}_t^{i+1}\| \leq \mu \tau_n^{i+1} \quad (11)$$

- contact avec glissement

$$(\mathbf{r}_t^{i+1}, \mathbf{r}_n^{i+1}) = \left( \boldsymbol{\tau}_t^{i+1} - (\|\boldsymbol{\tau}_t^{i+1}\| - \mu \tau_n^{i+1}) \frac{\boldsymbol{\tau}_t^{i+1}}{\|\boldsymbol{\tau}_t^{i+1}\|}, \tau_n^{i+1} + (\|\boldsymbol{\tau}_t^{i+1}\| - \mu \tau_n^{i+1}) \frac{\mu}{1 + \mu^2} \right) \quad (12)$$

Il est important de noter que, en comparaison avec la méthode de pénalisation, cette méthode permet d'obtenir des résultats stables et très précis. Le critère de convergence pour le contact est défini comme :

$$\frac{\|\Delta \mathbf{r}\|}{\|\mathbf{r}\|} \leq \varepsilon \quad (13)$$

avec  $\Delta \mathbf{r}$  l'incrément de réaction de contact pendant l'itération de l'algorithme local de contact,  $\mathbf{r}$  la réaction de contact et  $\varepsilon$  la tolérance de convergence.

#### 6.4 ALGORITHME GLOBAL

Dans le contexte du calcul par éléments finis, après discrétisation des solides en contact, on résout généralement un système d'équations d'équilibre au niveau global

$$\{\mathbf{R}^*(\mathbf{u})\} = -\{\mathbf{Fint}(\mathbf{u})\} + \{\mathbf{Fext}(\mathbf{u})\} + \{\mathbf{Reac}(\mathbf{u})\} = \mathbf{0} \quad (14)$$

où  $\mathbf{u}$  : vecteur de degrés de liberté de la structure

$\{\mathbf{R}^*(\mathbf{u})\}$  : vecteur des résidus

$\{\mathbf{Fint}(\mathbf{u})\}$  : vecteur des forces internes

$\{\mathbf{Fext}(\mathbf{u})\}$  : vecteur des forces extérieures

$\{\mathbf{Reac}(\mathbf{u})\}$  : vecteur des forces de contact et de frottement dans le repère global

Pour résoudre ce système d'équations non linéaires, on utilise une méthode itérative de type Newton-Raphson qui consiste à linéariser les équations précédentes par :

$$[\mathbf{K}_T]^i \{\mathbf{d}\}^{i+1} = \{\mathbf{R}\}^i + \{\mathbf{Reac}\}^i \quad (15)$$

$$\{\mathbf{u}\}^{i+1} = \{\mathbf{u}\}^i + \{\mathbf{d}\}^{i+1} \quad (16)$$

où  $[\mathbf{K}_T]$  : matrice tangente de rigidité à l'itération  $i$

$\{\mathbf{R}\} = -\{\mathbf{Fint}(\mathbf{u})\} + \{\mathbf{Fext}(\mathbf{u})\}$  à l'itération  $i$ .

Signalons que cette équation est fortement non linéaire car elle tient compte des multiples non-linéarités mécaniques telles que les non-linéarités matérielles dues à la loi de comportement du solide et les non-linéarités géométriques qui se manifestent lorsqu'apparaissent des grands déplacements ou des grandes déformations. De plus, les lois relatives au contact et au frottement sont exprimées par des inégalités, le potentiel du contact étant même non différentiable. Par conséquent, des difficultés numériques se manifestent à plusieurs niveaux au cours de :

- la résolution des équations non linéaires d'équilibre (niveau global);
- l'intégration des lois de comportement (niveau local);
- la résolution des inéquations de contact et de frottement couplées avec les équations d'équilibre (niveaux local et global).

Pour améliorer la stabilité de convergence, on a proposé une approche originale qui consiste à séparer les non-linéarités au lieu de les considérer de façon simultanée. Comme  $\{\mathbf{d}\}$  et  $\{\mathbf{Reac}\}$  sont tous deux inconnus, l'équation (15) ne peut pas être résolue directement. Le vecteur  $\{\mathbf{Reac}\}$  est d'abord déterminé par la méthode de prédiction-corréction dans un système réduit qui concerne uniquement les noeuds de contact. Le vecteur  $\{\mathbf{d}\}$  peut être déterminé ensuite dans toute la structure en considérant les réactions de contact et de frottement comme des forces extérieures. L'algorithme de résolution pas-à-pas de Newton-Raphson a été programmé en langage C++ et illustré par le tableau 6.1.

```

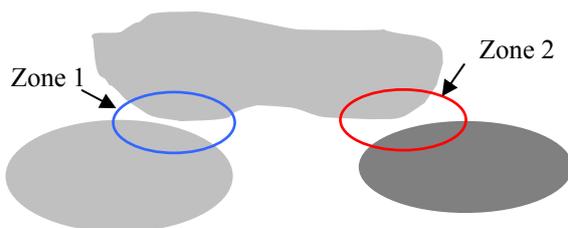
for (int ipas=0; ipas<max_pas; ipas++) { // pas de chargement
    if (contact) contact->contact_detection();
    for (int iter=0; iter<max_iter; iter++) { // itérations d'équilibre
        maillage->calculer_matrice_tangente(K);
        maillage->calculer_vecteur_résidus(R);
        maillage->appliquer_conditions_aux_limites();
        K.résoudre(d,R,1); // [K] {d} = - {R}
        if (contact) {
            contact->calculer_forces_contact(K,d,Reac);
            R+=Reac; K.résoudre(d,R,0); // [K] {d} = - {R} + {Reac}
        }
        maillage->actualisation(d); // Eq.(16)
        if (algorithme->test_convergence(d,R)) break;
    }
}

```

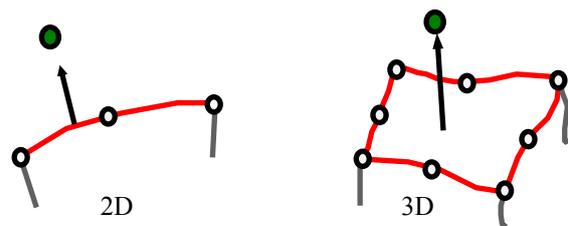
**Tableau 6.1 :** Algorithme de Newton-Raphson programmé en C++

La fonction "contact\_detection" traite les aspects purement géométrique : détermination des noeuds candidats au contact, calcul des écarts entre les noeuds de contact, calcul du repère local d'un noeud de contact. Du point de vue géométrique, le système de contact est organisé au travers des zones de contact (Figure 6.5). Chaque zone est composée d'une surface appelée contacteur qui est susceptible de venir en contact avec une autre surface appelée cible. Lorsqu'un noeud du contacteur vient en contact avec la cible, un élément fictif de contact est créé (Figure 6.6). Cet élément ne peut être considéré tel qu'un élément fini et n'intervient donc pas dans le calcul de la matrice de rigidité tangente; il est d'ailleurs supprimé lorsque le noeud quitte le contact. Le contact est donc traité dans un système réduit à dimensions variables. L'intérêt de cette procédure réside dans le fait que les temps de calcul sont largement diminués.

Un autre point important est que le traitement du contact consiste simplement à introduire un vecteur de forces de contact au second membre de l'équation d'équilibre sans apporter de modifications à la matrice globale de rigidité tangente et sans ajouter de nouveaux degrés de libertés (ce qui est le cas de la méthode de pénalisation ou de la méthode des multiplicateurs de Lagrange).



**Figure 6.5 :** Zones de contact



**Figure 6.6 :** Eléments de contact

## 6.5 EXEMPLES NUMERIQUES

Beaucoup d'applications, d'école ou industrielles, ont été réalisées par les méthodes développées au cours de ce travail de recherche. Le prototype de système de modélisation du contact avec frottement est capable de traiter des problèmes très généraux, par exemple:

- la modélisation du contact entre deux ou plusieurs corps rigides et déformables de géométrie arbitraire. La loi constitutive des matériaux déformés peut être linéaire ou non linéaire avec de grandes déformations et de grands déplacements (la mise en forme des matériaux et les problèmes de joints),
- le traitement du contact entre différentes parties de la surface extérieure d'un solide (auto-contact),
- le traitement du contact à l'intérieur d'un solide (la fermeture de fissures dans un solide endommagé).

Dans ce chapitre, on présente seulement trois exemples simples mais significatifs, résolus par le code FER/Contact.

D'autres exemples numériques qui font intervenir le contact peuvent être trouvés les références [8, 20,23,24].

**Exemple 1 : Contact entre un bloc élastique 2D et une plaque rigide**

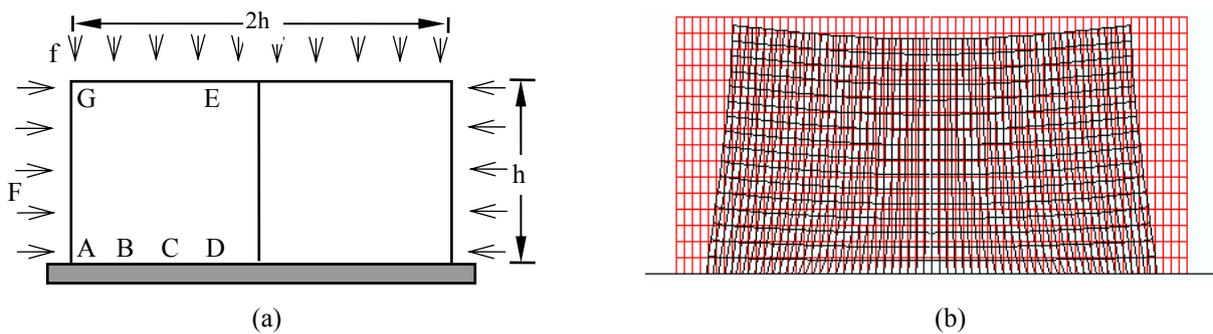
Cet exemple est souvent étudié pour valider un code de calcul [22]. Il s'agit d'un bloc compressé et poussé sur une plaque rigide avec un coefficient de frottement donné, comme le montre la figure 6.7(a). Les résultats obtenus sont comparés avec ceux des codes généraux des éléments finis ANSYS et ABAQUS. Cet exemple est très intéressant puisque nous pouvons avoir en même temps trois surfaces de contact de nature différente :

- décollement sur AB
- glissement sur BC
- adhérence sur CD

Pour cause de symétrie, seule la moitié du bloc est modélisée. Les constantes utilisées dans cet exemple sont :

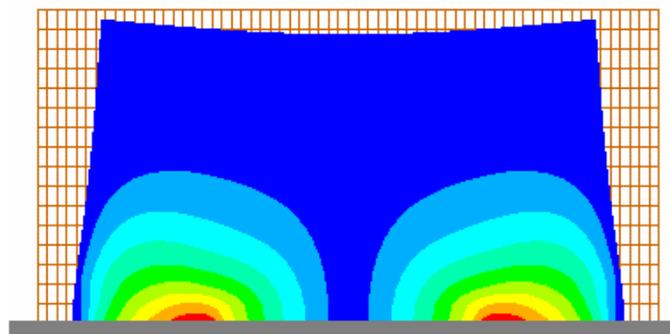
- Module d'Young :  $E = 13000 \text{ daN/mm}^2$
- Coefficient de Poisson :  $\nu = 0.2$
- Tolérance de convergence pour le contact :  $\epsilon = 10^{-10}$
- Conditions aux limites :  $u = 0$  sur ED, dû à la symétrie.
- Chargement :  $f = 5 \text{ daN/mm}^2$  sur GE,  $F = 10 \text{ daN/mm}^2$  sur GA.

Afin d'étudier l'influence du frottement sur le contact, l'exemple a été modélisé de la même façon en utilisant divers coefficients de frottement :  $\mu = 0, 0.1, \dots, 1.3$ . Le demi-bloc est modélisé par 561 noeuds et 512 quadrangles linéaires en déformation plane avec 9 points d'intégration par élément. La figure 6.7 (b) montre le maillage déformé (avec un facteur d'amplification de 300 et  $\mu = 1.0$ ).



**Figure 6.7 :** Contact entre un bloc élastique et une surface rigide ( $h = 40\text{mm}$ )

La figure 6.8 montre la répartition des contraintes de cisaillement. Les résultats obtenus sont tout à fait en accord avec d'autres résolutions déjà effectuées [22].



**Figure 6.8 :** Contraintes de cisaillement  $\sigma_{xy}$

Comme le montre le tableau 6.2, le temps CPU augmente en général avec le coefficient de frottement. Cette analyse a été effectuée sur une station SUN-UltraSparc 1. Le tableau 6.3 montre les résultats obtenus par le code FER/Contact où  $U_A$  et  $V_A$  représentent respectivement le déplacement horizontal et vertical au point A. Les réactions de contact sur AD calculées par différents codes ANASYS, ABAQUS et FER/Contact sont comparées à la figure 6.9. Les réactions de contact sur AD calculées par le code FER/Contact se trouvent en figure 6.10 pour les différents coefficients de frottement. Il faut noter que la solution de ce problème ne converge plus pour  $\mu > 1.4$ .

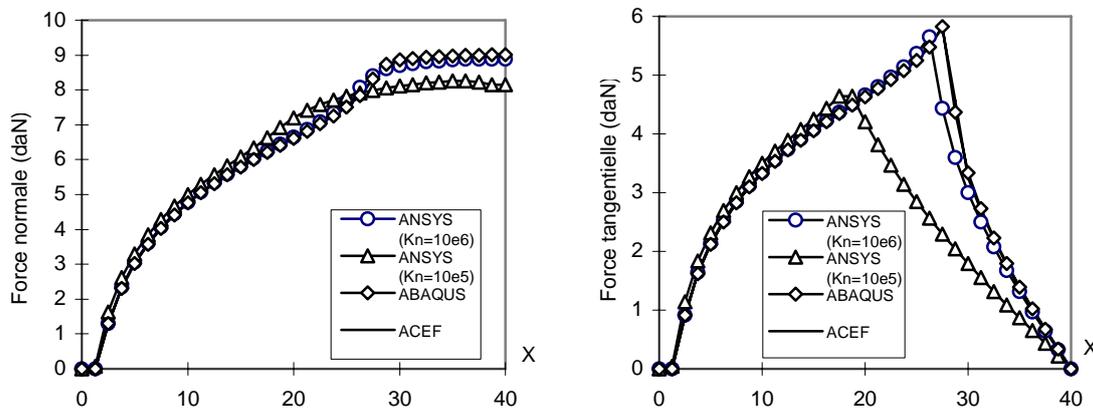
Code	$\mu=0.0$	$\mu=0.1$	$\mu=0.2$	$\mu=0.3$	$\mu=0.4$	$\mu=0.5$	$\mu=0.6$	$\mu=0.8$	$\mu=1.0$
FER/Contact	5	6	6	6	7	7	7	8	10
ANSYS <sup>1</sup>	50	52	48	49	72	74	83	47	72
ANSYS <sup>2</sup>	122	298	99	100	158	102	265	326	504
ANSYS <sup>3</sup>	744	815	691	1165	X	X	X	X	X
ABAQUS	14.25	19.52	20.27	22.3	22.51	24.15	26.36	31.73	38.8

**Tableau 6.2** : Comparaison du temps CPU (sec.).

Il faut noter que le code ANSYS utilise la méthode de pénalisation pour la résolution du contact. La convergence et la précision de solution dépendent fortement du facteur de pénalité  $K_n$ . Dans cette étude, on a choisi trois valeurs de  $K_n$  (voir Tableau 6.2): ANSYS<sup>1</sup> :  $K_n = 10^5$ ; ANSYS<sup>2</sup> :  $K_n = 10^6$ ; ANSYS<sup>3</sup> :  $K_n = 10^7$ . X : pas de convergence.

$\mu$	AB(mm)	BC(mm)	CD(mm)	$U_A$ (mm)	$V_A$ (mm)
0.0	0	40	0	0.0258462	0
0.2	0	38.75	1.25	0.0219946	0
0.4	1.25	35	3.75	0.0191215	0.0000178
0.6	1.25	28.75	10	0.0170216	0.0001710
0.8	2.5	22.5	15	0.0155744	0.0003721
1.0	3.75	17.5	18.75	0.0145967	0.0005576
1.2	3.75	16.25	20	0.0138995	0.0007371
1.3	3.75	15	21.25	0.0136419	0.0008009

**Tableau 6.3** : Zones de contact (résultats du code FER/Contact)



**Figure 6.9** : Efforts de contact normaux et tangentiels sur AD ( $\mu=0.7$ )

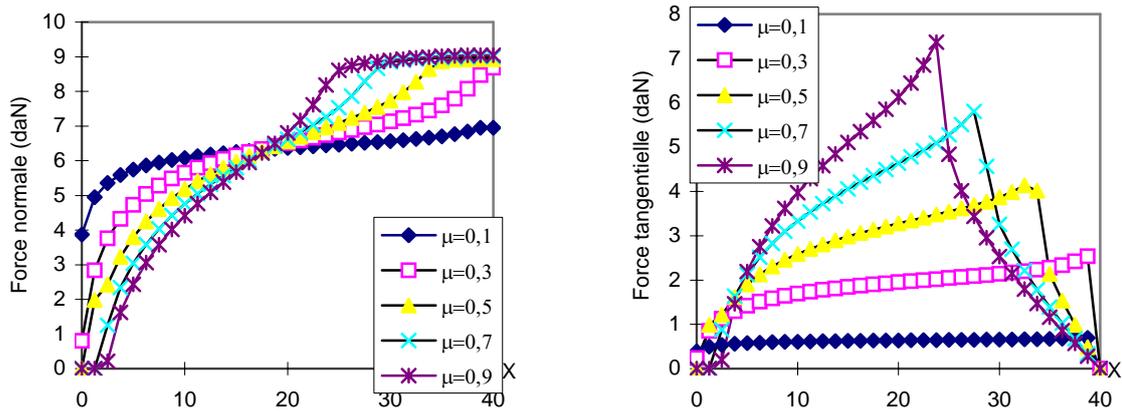


Figure 6.10 : Efforts de contact normaux et tangentiels sur AD

**Exemple 2 : Contact entre un bloc élastique 3D et une surface rigide**

Les équations de base du problème de contact 3D sont pratiquement les mêmes que celles du problème de contact 2D. Toutefois en 3D la plus grande difficulté est due à la modélisation du frottement puisqu'il faut chercher la direction de glissement. Le deuxième exemple traite du contact entre un bloc élastique 3D ABCDEFGH et une surface rigide  $\Gamma$  (Figure 6.11).

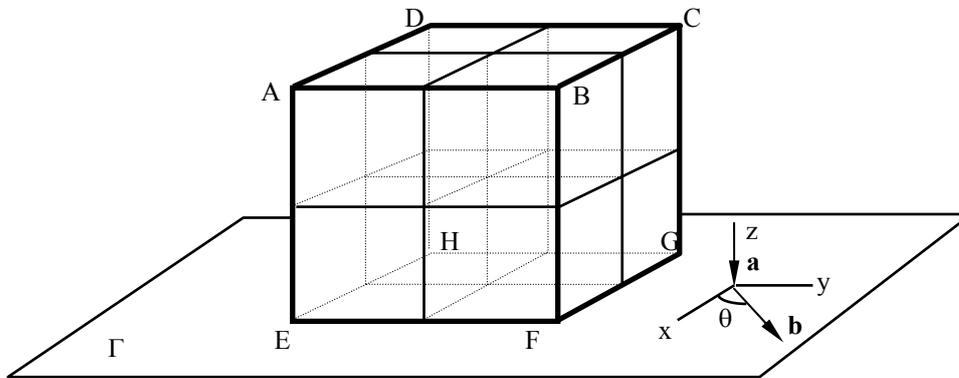


Figure 6.11 : Problème de contact 3D sous déplacement contrôlé

La surface supérieure ABCD décrit un mouvement rigide donné par  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . La surface inférieure EFGH vient en contact avec la surface rigide de vecteur normal  $(0,0,1)$ . Chaque côté du bloc a une largeur de 1 mm. Les caractéristiques utilisées pour cet exemple sont :

- Module d'Young :  $E = 210000 \text{ N/mm}^2$
- Coefficient de Poisson :  $\nu = 0.3$
- Coefficient de frottement :  $\mu = 0.3$
- Tolérance de convergence pour le contact :  $\varepsilon = 10^{-8}$
- Conditions aux limites :  $\|\mathbf{a}\| = 0.1 \text{ mm}$ ,  $\|\mathbf{b}\| = 0.4 \text{ mm}$  sur ABCD,  $\theta = 60^\circ$ .

Le bloc est divisé en 8 éléments 3D à 8 noeuds comme le montre la figure 6.11. Chaque élément possède 27 points d'intégration. 50 pas de chargement sont utilisés pour ce problème; un incrément de déplacement de 0,01 mm est donc appliqué à chaque pas sur ABCD. La figure 6.12 illustre l'évolution des réactions normales aux noeuds F et H en fonction du pas de chargement et les traces de noeuds G et H. On constate qu'après 25 pas de chargement, le glissement atteint un régime stationnaire. La réaction normale est de 2363.6 N au noeud F, et de 131.36 N au noeud H.

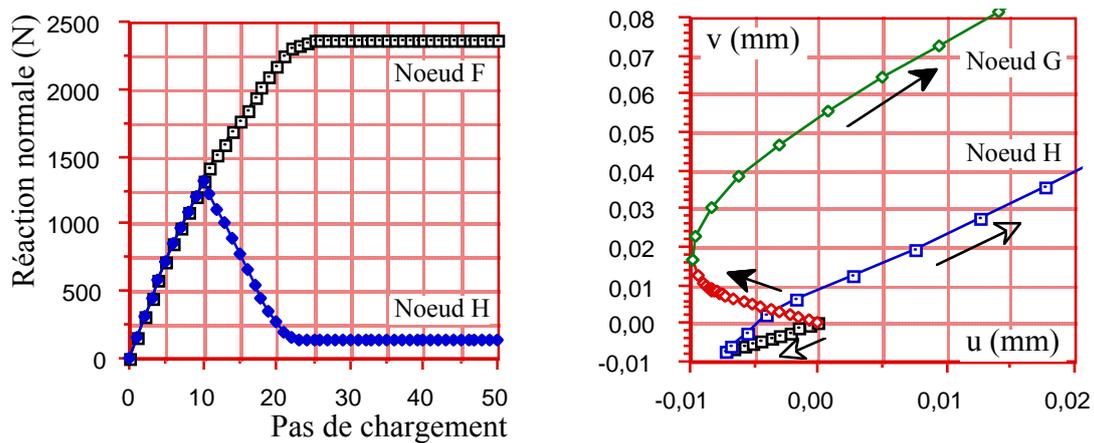


Figure 6.12 : Réactions et traces de noeuds (code FER/Contact)

**Exemple 3 : Contact entre deux corps déformables**

Cet exemple montre les possibilités de traiter les problèmes de contact avec frottement entre deux solides déformables. Plusieurs zones de contact apparaissent dans ce cas. La figure 6.13 montre le maillage et les conditions aux limites. La déformé et la répartition des contraintes de Von Mises sont illustrées à la figure 6.14.

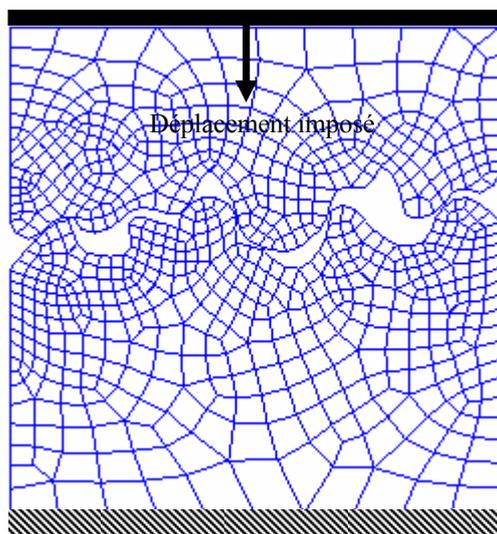


Figure 6.13 : Maillage et conditions limites

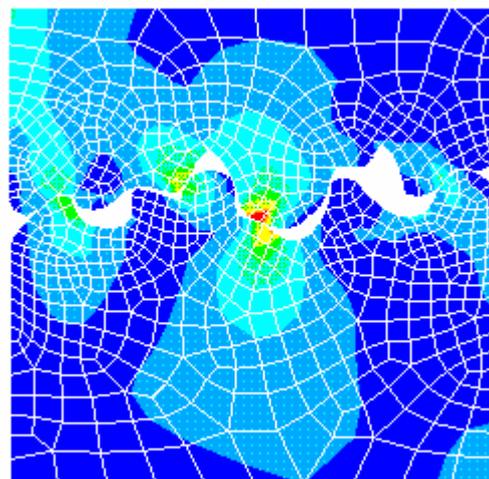


Figure 6.14 : Contraintes de Von Mises

**6.6 CONCLUSION**

Nous avons proposé une nouvelle méthode et une organisation informatique d'un système général de modélisation du contact, qui permet de traiter efficacement des problèmes très variés. Les méthodes s'intègrent facilement dans le schéma classique de la résolution des problèmes non linéaires, et tiennent compte des grandes déformations et grands déplacement des solides. Les tests effectués ont montré qu'avec beaucoup moins de temps de calcul, le code FER/Contact, que nous avons développé, obtient des résultats plus précis que les codes industriels ANSYS et ABAQUS. Ceci peut être expliqué par le fait que FER/Contact utilise une méthode originale qui calcule précisément les réactions de contact et de frottement sans pénaliser ni régulariser les lois de contact et de frottement.

## RÉFÉRENCES

- [1] Chan S.H. and Tuba I.S., "A finite element method for contact problems of solid bodies", *Int. J. Mech. Sci.*, **13**, 615-639, 1971.
- [2] Tsuta T. and Yamaji S., "*Finite element analysis of contact problem*", Theory and practice in finite element structural analysis proceedings of the 1973 Tokyo seminar on element analysis, 178-194, 1973.
- [3] Chen C.C. and Kobayashi S., "Rigid-plastic finite element analysis of ring compression", *AMD*, **28**, 1978.
- [4] Kikuchi N. and Oden J. T., "*Contact problems in elastostatics*". *Finite Elements*, vol.5 (Edited by Oden J. T. and Carey G. F.). Prentice -Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [5] ANSYS User's Manual, Revision 5.0, Volume IV, Theory, SAS , Inc., (1993).
- [6] Francavilla A. and Zienkiewicz O.C., "A note on numerical computation of elastic contact problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.* **9**, 913-924, 1975.
- [7] Shyu S.C., Chang T.Y. and Saleeb A.F., "Friction contact analysis using a mixed finite element method", *Computers & Structures*, **32**, 223-242, 1989.
- [8] Feng Z.-Q. and Touzot G., "*Analysis of two and three dimensional contact problems with friction by a mixed finite element method*", *Revue Européenne des Eléments Finis*, **1**, N°4, 441-459 (1992)
- [9] Nguyen D. H. and De Saxcé G., "Frictionless contact of elastic bodies by finite element méthode and mathematical programming technique", *Computers & Structures*. **11**, 55-67, 1980.
- [10] De Saxcé G. and Nguyen D.H., "Dual analysis of frictionless problems by displacement and equilibrium finite elements", *Eng. Struct.*, **6**, 26-32, 1984.
- [11] Klarbring A. and Björkman G., "A mathematical programming approach to contact problems with friction and varying contact surface", *Computers & Structures*, **30**, 1185-1198, 1988.
- [12] Zhong W.X. and Sun S.M., "A parametric quadratic programming approach to elastic contact problems with friction", *Computers & Structures*, **32**, 37-43, 1989.
- [13] Feng Z.Q., "Résolution du problème de contact unilatéral par une méthode de programmation mathématique: LCP - Linear Complementarity Problem", *Rapport interne*, MNM/UTC, 1990.
- [14] Simo J.C., Wriggers P. and Taylor R.L., "A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **50**, 163-180, 1985.
- [15] Wriggers P. and Simo J.C., "A note on tangent stiffness for fully nonlinear contact problems", *Comm. in Appl. Num. Meth.*, **1**, 199-203, 1985.
- [16] Curnier A. and Alart P., "A generalized Newton method of contact problems with friction", *J. Theo. Appl. Mech.*, **7**, 145-160, (1988)
- [17] Alart P. and Curnier A., "A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* **92**, 353-375 (1991).
- [18] Simo J.C. and Laursen T.A., "An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction", *Comput. Struct.*, **42**, 97-116 (1992).
- [19] De Saxcé G. and Feng Z.Q., "New inequality and functional for contact with friction: The implicit standard material approach", *Mech. Struct. Mach.*, **19**, 301-325 (1991).
- [20] Feng Z.Q., "2D or 3D frictional contact algorithms and applications in a large deformation context", *Comm. Numer. Methods Eng.*, **11**, 409-416 (1995).
- [21] Jean M., "Simulation numérique des problèmes de contact avec frottement", *Matériaux et techniques*, Journées de la Société Tribologique Française, 9-10 Avr. (1992).
- [22] Raous M., Chabrand P. and Lebon F., "Numerical methods for frictional contact problems and applications", *J. Theor. Appl. Mech.*, **7**, 111-128 (1988).
- [23] De Saxcé G. and Feng Z.Q., "*The bipotential method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms*", *Int. J. Mathematical and Computer Modeling*, special issue, « Recent Advances in Contact Mechanics » (1998), Vol.28, No.4-8, 225-245 (1998)
- [24] Feng Z.Q., "*Some test examples of 2D and 3D contact problems involving Coulomb friction and large slip*", *Int. J. Mathematical and Computer Modeling*, special issue, « Recent Advances in Contact Mechanics » (1998), Vol.28, No.4-8, 469-477 (1998)

### 7.1 Généralité

Les caoutchoucs et les polymères, qui ont un comportement hyperélastique, travaillent généralement en grandes déformations. Notons  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{X}$  les vecteurs position d'une particule  $P$  dans les configurations courante et initiale d'un corps déformable (Figure 7.1).

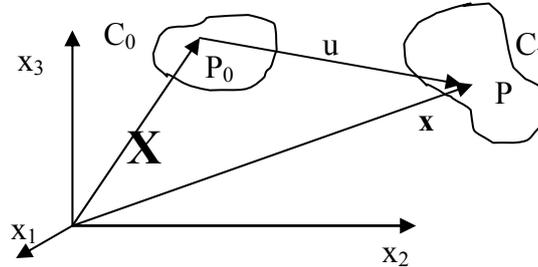


Figure 7.1. *Configurations*

Avec une description Lagrangienne, le mouvement de ce corps est défini par une fonction affine  $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X})$ . En introduisant le vecteur déplacement  $\mathbf{u}$ , on a :

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (1)$$

Afin de décrire les transformations géométriques associées à ces grandes déformations, on introduit le tenseur gradient des déformations :

$$F_{ij}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{X})}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad \text{ou} \quad \mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} \quad (2)$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur unité.

En raison des grands déplacements et des grandes rotations, le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  est adopté pour décrire la relation non linéaire entre les déformations et les déplacements :

$$\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2 \quad (3)$$

où  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  est le tenseur des déformations de Cauchy-Green à droite.

Dans le cas d'une loi hyperélastique, il existe une densité d'énergie de déformations  $W$  qui dépend de l'un de ces tenseur de déformations et dont la dérivée donne le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff  $\mathbf{S}$  :

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \quad (4)$$

Dans le cas du modèle de Blatz-Ko, qui permet de représenter le comportement de mousse élastomère ou de caoutchouc en polyuréthane, cette densité d'énergie est donnée par :

$$W = \frac{G}{2} \left[ \frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right] \quad (5)$$

où  $G$  est le module de cisaillement et  $I_i$  ( $i=1,2,3$ ) sont les invariants du tenseur des déformations de Cauchy-Green à droite  $\mathbf{C}$  :

$$I_1 = C_{ii}; \quad I_2 = (I_1^2 - C_{ij} C_{ij})/2; \quad I_3 = \det(\mathbf{C}) \quad (6)$$

En dérivant la densité d'énergie (11) par rapport à ces trois invariants, on obtient:

$$\mathbf{S} = G \mathbf{F}^{-1} \left\{ \sqrt{I_3} \mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1} \right\} \mathbf{F}^{-T} \quad (7)$$

où  $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$  est le tenseur des déformations de Cauchy-Green à gauche associé à  $\mathbf{F}$ .

On peut noter les relations entre le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff  $\boldsymbol{\Pi}$  et le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff  $\mathbf{S}$ :

$$\det(\mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Pi} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (8)$$

La loi de comportement (4) peut donc s'exprimer en fonction du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = G \left\{ \mathbf{I} - \left( \sqrt{I_3} \right)^{-1} \mathbf{B}^{-1} \right\} \quad (9)$$

ou avec le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff :

$$\boldsymbol{\Pi} = G \left[ \left( \det(\mathbf{F}) \right) \mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1} \right] \mathbf{F}^{-T} \quad (10)$$

Enfin, pour pouvoir implémenter ultérieurement la loi de comportement (4) dans le cadre d'une formulation éléments finis en Lagrangien total, on pose  $J = \sqrt{\det(2\mathbf{E} + \mathbf{I})}$  et on exprime  $\mathbf{S}$  en fonction de  $\mathbf{E}$  :

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = G \left\{ J (2\mathbf{E} + \mathbf{I})^{-1} - (2\mathbf{E} + \mathbf{I})^{-2} \right\} \quad (11)$$

## 7.2 Cas d'étude : Cube en compression dans un container rigide

On considère un cube hyperélastique de hauteur  $H=0.5$  m et soumis à un effort de compression  $p$  dans un container rigide indéformable (Figure 7.2). On suppose que le contact entre les parois latérales du cube et le container est sans frottement et que la base du cube est parfaitement collée sur le fond du container.

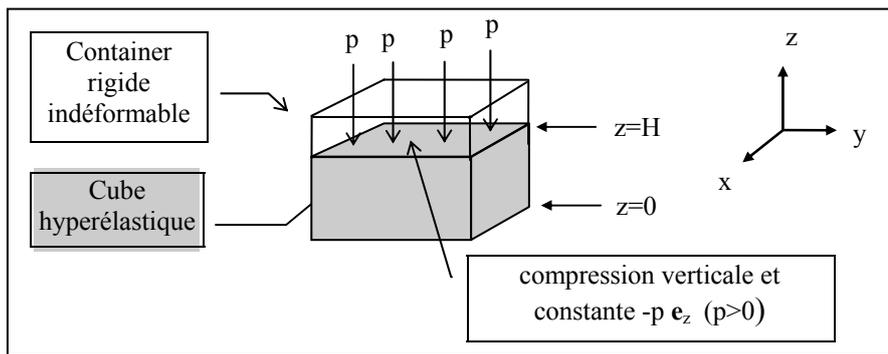


Figure 7.2. Cube en compression dans un container rigide

Il découle de la forme du chargement et de la nature du container que le déplacement  $u(x,y,z)$  satisfait :

$$u_x = u_y = 0 ; u_z(z) \neq 0 \quad (12)$$

L'équation d'équilibre en variable de Lagrange  $\text{div} \boldsymbol{\Pi} = 0$  conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{\partial \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^{-3} \right]}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

L'intégration de (13) et la prise en compte des conditions aux limites donnent la composante  $u_z$  des déplacements. On

déduit ensuite de l'expression du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff  $\text{div}\mathbf{\Pi} = 0$  le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$ . Tout calcul fait, on obtient :

$$u_z(z) = \left[ \left( 1 + \frac{p}{\mu} \right)^{-1/3} - 1 \right] z ; \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \mu \left\{ 1 - \left( 1 + \frac{p}{\mu} \right)^{1/3} \right\} ; \sigma_{zz} = -p \quad (14)$$

les autres composantes étant nulles.

Afin de corrélérer les formules (14), nous avons effectué des comparaisons avec le code aux éléments finis FER (Tableau 7.1). Les données numériques pour le calcul sont :  $H = 0.5 \text{ m}$  ;  $p = 5 \text{ MPa}$  ;  $\mu = 220\,711,2 \text{ Pa}$ . L'écart relatif obtenu étant très faible, la solution analytique est validée.

z	Analytique	FER	Ecart (%)
H	$u_z = -0.325818682 \text{ m}$	$u_z = -0.325818682 \text{ m}$	0
0	$\sigma_{xx} = -412856.1735 \text{ Pa}$	$\sigma_{xx} = -412856.174 \text{ Pa}$	1.2E-7
0	$\sigma_{zz} = -5000000 \text{ Pa}$	$\sigma_{zz} = -5000000 \text{ Pa}$	0

Tableau 7.1. Comparaison calcul analytique-calcul numérique

La relation entre les déplacements et les efforts peut être obtenue grâce à la minimisation de l'énergie potentielle totale, en liaison avec l'hypothèse de champ de déplacement linéaire. En effet, un tel champ est défini par :

$$u_z(z) = \frac{u}{H} z \quad (15)$$

D'après (5), la densité d'énergie qui lui est associée est donc :

$$W = \frac{\mu}{2} \left\{ \left( 1 + \frac{u}{H} \right)^{-2} + 2 \frac{u}{H} - 1 \right\} \quad (16)$$

On en déduit l'énergie potentielle totale :

$$I(u) = \frac{\mu}{2} \left\{ \left( 1 + \frac{u}{H} \right)^{-2} H + 2u - H \right\} + pu \quad (17)$$

L'équation cherchée, associée à la minimisation de cette énergie, est donc :

$$K(u) = \mu \left[ 1 - \left( 1 + \frac{u}{H} \right)^{-3} \right] = -p \quad (18)$$

La courbe d'équation  $f = K(u)$  est représentée sur la figure 7.3.

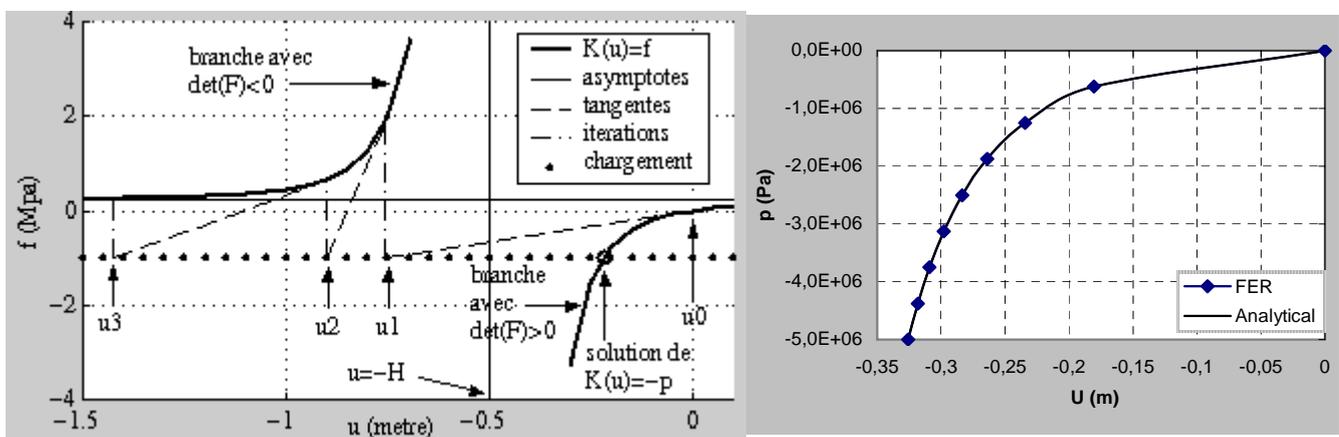


Figure 7.3. Graphe de  $f=K(u)$  et divergence de Newton-Raphson

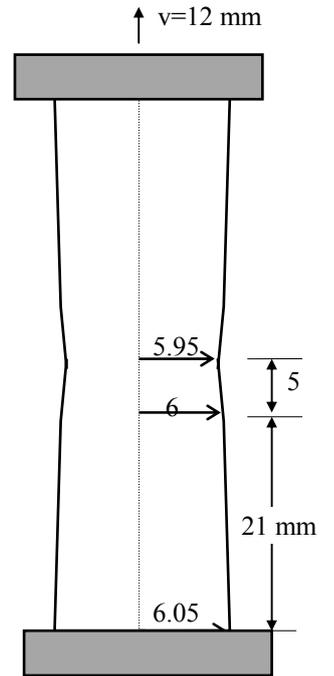
### 7.3 Travaux Pratiques sur ANSYS

**Modélisation en élastoplasticité**

Nous considérons une éprouvette en essai de traction simple. L'objectif est de calculer les contraintes, les déformations totales, les déformations plastiques et de déterminer la courbe "déplacement - force".

La barre cylindrique est constituée d'un matériau élastoplastique avec les propriétés suivantes:

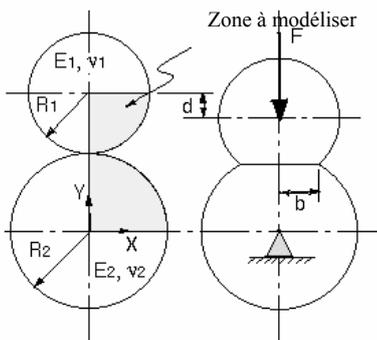
- module de Young  $E = 200000$  MPa
- coefficient de Poisson  $\nu = 0.29$
- limite élastique = 400 MPa
- écrouissage isotrope défini en huit points :



p	0.002	0.006	0.0178	0.0378	0.0678	0.1478	0.498	1.0
$\sigma$ (MPa)	400	450	514	590	642	700	790	840

**Modélisation du contact entre deux cylindres (Contact Hertz)**

L'objectif est de calculer les contraintes et les réactions du contact entre deux cylindres élastiques (voir figure).

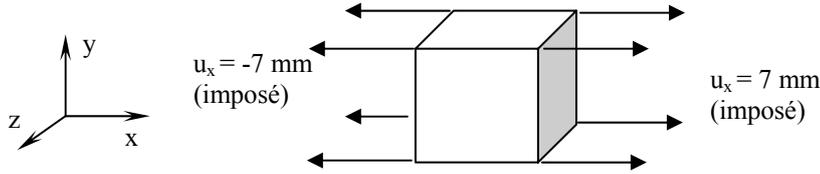


Propriétés du matériau	
$E_1$	= 30000 N/mm <sup>2</sup>
$\nu_1$	= 0.25
$E_2$	= 29120 N/mm <sup>2</sup>
$\nu_2$	= 0.3

Propriétés géométriques	
$R_1$	= 10 mm
$R_2$	= 13 mm
Force appliquée	
$F$	= 3200 N/mm

Résultats de référence :  $d = 0.429$  mm ;  $b = 1.2$  mm.

Nous considérons un cube (1×1×1 mm) en essai de traction simple. Le cube est constitué d'un matériau hyperélastique. L'objectif de cette étude est de déterminer l'évolution de la force de traction en fonction du déplacement imposé.



- **Modèle Ogden**

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left( \lambda_1^{\alpha_i/2} + \lambda_2^{\alpha_i/2} + \lambda_3^{\alpha_i/2} - 3 \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i \beta_i} \left( J^{-\alpha_i \beta_i} - 1 \right)$$

avec les propriétés suivantes (N=3):

$$\begin{array}{lll} \mu_1 = 0.66; & \mu_2 = 0.0012; & \mu_3 = -0.01 \\ \alpha_1 = 1.3; & \alpha_2 = 5; & \alpha_3 = -2 \\ \beta_1 = 10; & \beta_2 = 10; & \beta_3 = 10 \end{array} \quad (*)$$

Solution analytique :  $F_x = A_0 \sum_{i=1}^N \mu_i \left( \lambda_x^{\alpha_i - 1} - \lambda_x^{\alpha_i/2 - 1} \right)$

où  $A_0$  est la section initiale et  $\lambda_x$  l'allongement suivant x.

- **Modèle Blatz-Ko**

$$W = \frac{G}{2} \left( \frac{I_2}{I_3} + 2J - 5 \right)$$

Le module de cisaillement du matériau est calculé par

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i$$

où  $\alpha_i$  et  $\mu_i$  (i=1, 3) sont donnés par (\*).

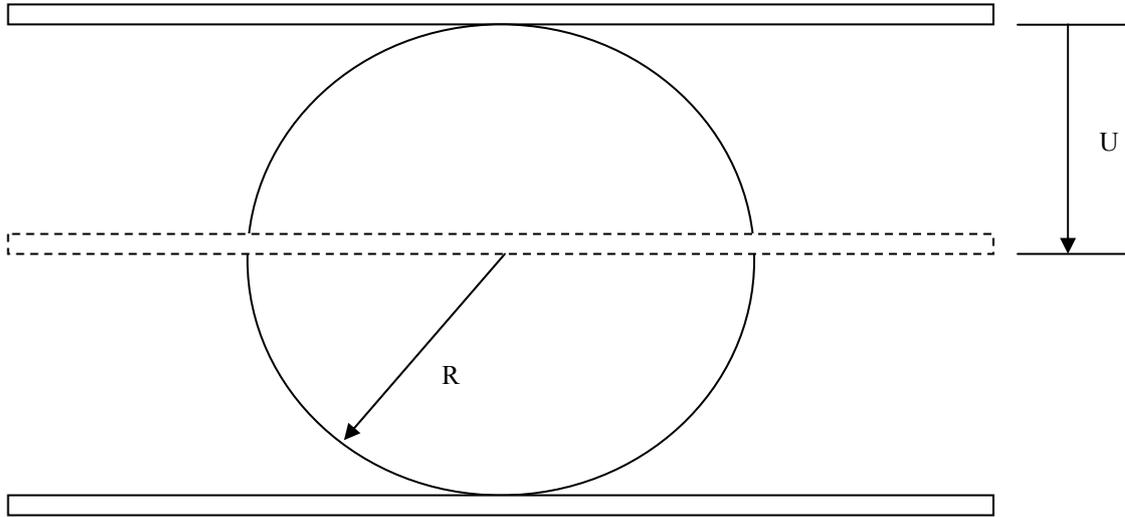
- **Modèle Gent**

$$W(I_1^*, J) = -\frac{\mu}{2} J_m \ln \left( 1 - \frac{I_1^* - 3}{J_m} \right) + \frac{1}{d} \left( \frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right)$$

avec  $\mu = 3$ ;  $J_m = 42$ ;  $d = 10^{-3}$ .

## Modélisation du contact en grandes déformations hyperélastiques ou élastoplastiques

Nous considérons un cylindre de rayon  $R = 200$  mm, comprimé par deux plaques rigides. Le cylindre est constitué d'un matériau hyperélastique ou élasto-plastique. L'objectif de cette étude est de calculer les contraintes dans le cylindre et de déterminer l'évolution de la force d'écrasement en fonction du déplacement imposé  $U = 200$  mm.



➤ **matériau hyperélastique : modèle Mooney-Rivlin**

$$E = 2.82 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.49967$$

$$C_1 = 0.293 \text{ MPa}$$

$$C_2 = 0.177 \text{ MPa}$$

$$d = \frac{2(1 - 2\nu)}{C_1 + C_2}$$

➤ **matériau élasto-plastique**

- module de Young  $E = 200000$  MPa
- coefficient de Poisson  $\nu = 0.29$
- limite élastique = 400 MPa
- écrouissage isotrope défini en huit points :

$p$	0.002	0.006	0.0178	0.0378	0.0678	0.1478	0.498	1.0
$\sigma(\text{MPa})$	400	450	514	590	642	700	790	840

# Solution of large deformation impact problems with friction between Blatz–Ko hyperelastic bodies

Zhi-Qiang Feng \*, Benoît Magnain, Jean-Michel Cros

*Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry, Université d'Evry-Val d'Essonne, 40 rue du Pelvoux, F91020 Evry Cedex, France*

Received 16 December 2004; received in revised form 29 June 2005; accepted 29 June 2005

---

## Abstract

Feng et al. [Z.Q. Feng, F. Peyraut, N. Labed, Solution of large deformation contact problems with friction between Blatz–Ko hyperelastic bodies, *Int. J. Eng. Sci.* 41 (2003) 2213–2225] have proposed a study of contact problems between Blatz–Ko hyperelastic bodies in static cases using the bi-potential method. The extension of this method for dynamic analysis of impact problems is realized in the present work. The total Lagrangian formulation is adopted to describe large strains and large displacements non-linear behavior. A first order algorithm is applied for the numerical integration of the time-discretized equation of motion. Numerical examples are carried out in two cases: rigid–deformable and deformable–deformable–rigid impacts in 2D. Numerical results show that the proposed approach is robust and efficient and the physical energy dissipation phenomena are apparently illustrated.

© 2005 Elsevier Ltd. All rights reserved.

*Keywords:* Impact and friction; Hyperelastic large strains; Energy dissipation

---

## 1. Introduction

Problems involving contact and friction are among the most difficult ones in mechanics and at the same time of crucial practical importance in many engineering branches. A large number of algorithms for the modeling of contact problems by the finite element method have been presented in the literature. See for example the monographs by Kikuchi and Oden [2], Zhong [3] and Wriggers [4] and the references therein. De Saxcé and Feng [5] have proposed a bi-potential method, in which an augmented Lagrangian formulation was developed. Recently, Feng et al. [1] have successfully applied this method for the modeling of static contact problems between Blatz–Ko hyperelastic bodies.

For dynamic implicit analysis in structural mechanics, the most commonly used time integration algorithm is the second order algorithm such as Newmark, Wilson, HHT [6]. Hughes et al. [7] have presented a modified Newmark scheme for a class of contact–impact problems. The modification is based on some consideration of

---

\* Corresponding author. Tel.: +33 1 69 47 75 01; fax: +33 1 69 47 75 99.  
E-mail address: [feng@iup.univ-evry.fr](mailto:feng@iup.univ-evry.fr) (Z.-Q. Feng).

wave propagation results. Wriggers et al. [8] have developed a radial return mapping scheme to deal with impact–contact problems. Armero and Petocz [9,10] and Laursen et al. [11–13] have considered dynamic impact under the auspices of a conservative system and have proposed the means to address the dynamic contact conditions so that they preserve the global conservation properties. The integration scheme is based on the second order algorithm. Some first order algorithms have also been proposed by Zienkiewicz et al. [14] and Jean [15] for time stepping in structural dynamics.

The aim of the present paper is to apply the bi-potential method for contact modeling in dynamic cases involving large displacements and large hyperelastic strains using the first order algorithm for integration of the equation of motion. The algorithm developed is implemented into the finite element code FER/impact, using C++ with object oriented programming techniques. Two numerical examples are performed in this study to show the validity of the model developed. The first example concerns the impact of a hyperelastic cylinder into a funnel. In order to show the physical energy dissipation by frictional effects, frictionless and frictional contact are considered for this example and the locking phenomenon is observed. The second example simulates the impact with jumping between two hyperelastic bodies and a rigid foundation.

## 2. Problem setting

### 2.1. Contact kinematics

In the following, basic definitions and notations used are described. Two deformable bodies  $\mathcal{B}^\alpha$  (Fig. 1),  $\alpha = 1, 2$ , are considered. Each of them occupies the open, simply connected, bounded domain  $\Omega^\alpha \subset \mathbb{R}^3$ , whose generic point is denoted  $\mathbf{X}^\alpha$ . Furthermore, the solids are elastic and undergo large displacements. The boundary  $\Gamma^\alpha$  of each body is assumed to be sufficiently smooth everywhere such that an outward unit normal vector, denoted by  $\mathbf{n}^\alpha$ , can be defined at any point  $M$  on  $\Gamma^\alpha$ . At each time  $t \in \mathbf{I}$ , where  $\mathbf{I} = [0, T]$  denotes the time interval corresponding to the loading process, the boundary  $\Gamma^\alpha$  of the body  $\mathcal{B}^\alpha$  can, in general, be split into three parts:  $\Gamma_u^\alpha$  with prescribed displacements  $\bar{\mathbf{u}}^\alpha$ ,  $\Gamma_t^\alpha$  with prescribed boundary loads  $\bar{\mathbf{t}}^\alpha$ , and the potential contact surfaces  $\Gamma_c^\alpha$  where the two bodies  $\mathcal{B}^1$  and  $\mathcal{B}^2$  may possibly come into contact at some time  $t$  (see Fig. 1):

$$\Gamma^\alpha = \Gamma_u^\alpha \cup \Gamma_t^\alpha \cup \Gamma_c^\alpha \tag{1}$$

The successive deformed configurations of  $\mathcal{B}^\alpha$  are described at each time  $t$  by the displacement fields  $\mathbf{u}^\alpha$  defined on  $\bar{\Omega}^\alpha$  (i.e. the closure of  $\Omega^\alpha$ ). On the contact surface, a unique normal  $\mathbf{n}$  directed towards  $\mathcal{B}^1$  ( $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}^2$ ) is defined and the tangential plane, orthogonal to  $\mathbf{n}$  in  $\mathbb{R}^3$ , is denoted by  $\mathbf{T}$ . To construct an orthonormal local basis, two unit vectors  $\mathbf{t}_x$  and  $\mathbf{t}_y$  are defined within the plane  $\mathbf{T}$ . For describing the frictional contact interactions that may occur on  $\Gamma_c$ , we introduce the relative velocity with respect to  $\mathcal{B}^2$

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^1 - \dot{\mathbf{u}}^2 \tag{2}$$

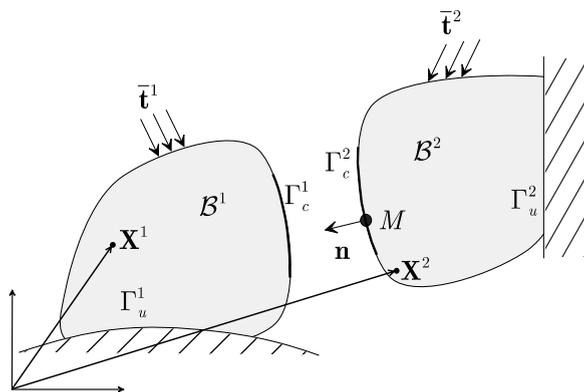


Fig. 1. Contact kinematics.

where  $\dot{\mathbf{u}}^1$  and  $\dot{\mathbf{u}}^2$  are the instantaneous velocities of  $\mathcal{B}^1$  and  $\mathcal{B}^2$ , respectively. Let  $\mathbf{r}$  be the contact force distribution exerted on  $\mathcal{B}^1$  at  $M$  from  $\mathcal{B}^2$ . According to the action–reaction principle,  $\mathcal{B}^2$  is subjected to the stress vector  $-\mathbf{r}$ . In the local coordinate system defined by the tangential plane  $\mathbf{T}$  and the normal  $\mathbf{n}$ , any element  $\dot{\mathbf{u}}$  and  $\mathbf{r}$  may be uniquely decomposed as

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_t + \dot{u}_n \mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{u}}_t \in \mathbf{T}, \quad \dot{u}_n \in \mathbb{R} \tag{3}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_t + r_n \mathbf{n}, \quad \mathbf{r}_t \in \mathbf{T}, \quad r_n \in \mathbb{R} \tag{4}$$

### 2.2. Contact law and friction rule

The unilateral contact law is characterized by a geometric condition of non-penetration, a static condition of no-adhesion and a mechanical complementary condition. These three conditions are known as the Signorini conditions. The non-penetration condition constraints the displacement fields  $\mathbf{u}^\alpha$  and is given by

$$g(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}^1 - \mathbf{X}^2) \cdot \mathbf{n} \geq 0 \tag{5}$$

where

$$\mathbf{X}^\alpha(t) = \mathbf{X}^\alpha(t=0) + \mathbf{u}^\alpha \tag{6}$$

The position vector  $\mathbf{X}^2$  is found as the closest-point projection of the point  $\mathbf{X}^1 \in \Gamma_c^1$  on the surface  $\Gamma_c^2$ . Denoting by  $h$  the initial gap obtained at the beginning of each time step.

$$h = (\mathbf{X}^1 - \mathbf{X}^2) \cdot \mathbf{n} \geq 0 \tag{7}$$

the impenetrability Signorini conditions are given by

$$u_n + h \geq 0, \quad r_n \geq 0, \quad (u_n + h)r_n = 0 \tag{8}$$

These conditions have to be satisfied at each time-instant  $t \in \mathbf{I}$ . Assume now that the bodies are initially in contact on a certain portion of  $\Gamma_c$ . On this part of  $\Gamma_c$ , the Signorini conditions turn into

$$u_n \geq 0, \quad r_n \geq 0, \quad u_n r_n = 0 \tag{9}$$

In general, at any time  $t \in \mathbf{I}$ , the potential contact surfaces  $\Gamma_c^\alpha$  can be split into two disjoint parts:  ${}^+\Gamma_c$  where the bodies are already in contact and  ${}^-\Gamma_c$  where the bodies are not in contact:

$$\Gamma_c^\alpha = {}^+\Gamma_c \cup {}^-\Gamma_c \tag{10}$$

In contrast to  $\Gamma_c^\alpha$ ,  ${}^+\Gamma_c$  and  ${}^-\Gamma_c$  change in time  $t$  and can be empty at some  $t \in \mathbf{I}$ . We must stress that with the formulation (9) only a loss of contact is allowed and the extension of the contact area cannot be modelled with these relations. In the case of dynamic analysis such as impact problems, the Signorini conditions can be formulated, on  ${}^+\Gamma_c$ , in terms of relative velocity

$$\dot{u}_n \geq 0, \quad r_n \geq 0, \quad \dot{u}_n r_n = 0 \quad \text{on } {}^+\Gamma_c \tag{11}$$

when  $\dot{u}_n > 0$ , the bodies are separating while they remain in contact for  $\dot{u}_n = 0$ . The previous formulation of the Signorini conditions (11) can be combined with the sliding rule to derive the complete frictional contact law applicable on the contacting part of  $\Gamma_c$ . This complete law specifies possible velocities of bodies that satisfy impenetrability, non-adhesion and the sliding rule. Obviously, for a strictly positive gap ( $u_n > 0$ ), the normal relative velocity is arbitrary ( $\dot{u}_n \in \mathbb{R}$ ) and the normal reaction force is equal to zero ( $r_n = 0$ ). Motions of bodies that are not in contact are arbitrary until contact is made. This choice is motivated by the fact that the emphasis is put on the definition of admissible evolutions for contacting bodies where the time integration has to be performed. In the rest of the paper, a “minus” sign will always precede the relative tangential velocity  $-\dot{\mathbf{u}}_t$  to emphasize its opposite direction to the friction force.

Classically, a rate independent dry friction law is characterized by a kinematic slip rule. In this work, the classical Coulomb friction rule is used. The set of admissible forces, denoted by  $K_{\mu}$ , is defined by

$$K_\mu = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \text{ such that } \|\mathbf{r}_t\| - \mu r_n \leq 0\} \tag{12}$$

$K_\mu$  is the so-called Coulomb’s cone and is convex.

### 2.3. Complete frictional contact law

We consider now the previous friction law embedding an impenetrability condition for completeness. On the contact surface  $\Gamma_c$ , the sliding rule can be combined with the rate form of the Signorini conditions to obtain the frictional contact law that specifies possible scenarios on the contact area (stick, slip and separation). The multivalued nature of this strongly non-linear law makes problems involving frictional contact among the most difficult ones in solid mechanics. Two overlapped “if...then...else” statements can be used to write it analytically:

if	$r_n = 0$ then $\dot{u}_n > 0$	! separating
elseif	$\mathbf{r} \in \text{int } K_\mu$ then $\dot{u}_n = 0$ and $\dot{\mathbf{u}}_t = \mathbf{0}$	! sticking
else	$(\mathbf{r} \in \text{bd } K_\mu \text{ and } r_n > 0)$	! sliding
	$\left\{ \dot{u}_n = 0 \text{ and } \exists \dot{\lambda} > 0 \text{ such that } -\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\lambda} \frac{\mathbf{r}_t}{\ \mathbf{r}_t\ } \right\}$	
endif		

(13)

where “int  $K_\mu$ ” and “bd  $K_\mu$ ” denote the interior and the boundary of  $K_\mu$ , respectively. The multivalued character of the law lies in the first and the second part of the statement. If  $r_n$  is null then  $\dot{\mathbf{u}}$  is arbitrary but its normal component  $\dot{u}_n$  should be positive. In other words, one single element of  $\mathbb{R}^3$  ( $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ) is associated with an infinite number of velocity vectors  $\dot{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3$ . The same arguments can be developed for the second part of the statement. The inverse law, i.e. the relationship  $\mathbf{r}(-\dot{\mathbf{u}})$ , can be written as

if	$\dot{u}_n > 0$ then $r_n = 0$	! separating
elseif	$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ then $\mathbf{r} \in K_\mu$	! sticking
else	$(\dot{\mathbf{u}} \in \mathbf{T} - \{\mathbf{0}\})$	! sliding
	$\left\{ \dot{u}_n = 0 \text{ and } \mathbf{r}_t = \mu r_n \frac{-\dot{\mathbf{u}}_t}{\ -\dot{\mathbf{u}}_t\ } \right\}$	
endif		

(14)

The complete form of the frictional contact law involves three possible states, which are separating, contact with sticking, and contact with sliding. Only the last state produces energy dissipation.

### 3. The bi-potential method

De Saxcé and Feng [5] have shown that the contact law (13) is equivalent to the following differential inclusion:

$$(-\dot{\mathbf{u}}_t - (\dot{u}_n + \mu\|-\dot{\mathbf{u}}_t\|)\mathbf{n}) \in \partial \bigcup_{K_\mu} \mathbf{r} \tag{15}$$

where  $\bigcup_{K_\mu} \mathbf{r}$  denotes the so-called indicator function of the closed convex set  $K_\mu$ :

$$\bigcup_{K_\mu}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathbf{r} \in K_\mu \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \tag{16}$$

The following contact bi-potential is obtained:

$$b_c(-\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r}) = \bigcup_{\mathbb{R}_-} (-\dot{u}_n) + \bigcup_{K_\mu}(\mathbf{r}) + \mu r_n\|-\dot{\mathbf{u}}_t\| \tag{17}$$

where  $\mathbb{R}_- = ]-\infty, 0]$  is the set of the negative and null real numbers.

In order to avoid non-differentiable potentials that occur in non-linear mechanics, such as in contact problems, it is convenient to use the augmented Lagrangian method [5]. For the contact bi-potential  $b_c$ , given by (17), provided that  $\dot{u}_n \geq 0$  and  $\mathbf{r} \in K_\mu$ , we have:

$$\forall \mathbf{r}' \in K_\mu, \quad \varrho \mu (\mathbf{r}'_n - r_n) \|\mathbf{r}' - \dot{\mathbf{u}}_t\| + (\mathbf{r}' - (\mathbf{r} - \varrho \dot{\mathbf{u}})) \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \geq 0 \tag{18}$$

where  $\varrho$  is a solution parameter which is not user-defined. From numerical experiments,  $\varrho$  can be chosen as the maximum value of the diagonal terms of the local contact stiffness matrix. Taking account of the decomposition (3) and (4), the following inequality has to be satisfied:

$$\mathbf{r}' \in K_\mu, \quad (\mathbf{r} - \boldsymbol{\tau}) \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \geq 0 \tag{19}$$

where the modified augmented surface traction  $\boldsymbol{\tau}$  is defined by

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} + \varrho(-\dot{\mathbf{u}}_t - (\dot{u}_n + \mu \|\mathbf{r}' - \dot{\mathbf{u}}_t\|) \mathbf{n}) \tag{20}$$

The inequality (19) means that  $\mathbf{r}$  is the projection of  $\boldsymbol{\tau}$  onto the closed convex Coulomb's cone:

$$\mathbf{r} = \text{proj}(\boldsymbol{\tau}, K_\mu) \tag{21}$$

For the numerical solution of the implicit Eq. (21), Uzawa's algorithm can be used, which leads to an iterative process involving one predictor–corrector step:

Predictor $\boldsymbol{\tau}^{i+1} = \mathbf{r}^i + \varrho^i(-\dot{\mathbf{u}}_t^i - (\dot{u}_n^i + \mu \ \mathbf{r}^i - \dot{\mathbf{u}}_t^i\ ) \mathbf{n})$	(22)
Corrector $\mathbf{r}^{i+1} = \text{proj}(\boldsymbol{\tau}^{i+1}, K_\mu)$	

It is worth noting that, in this algorithm, the unilateral contact and the friction are coupled via the bi-potential. Another gist of the bi-potential method is that the corrector can be analytically found with respect to the three possible contact statuses:  $\boldsymbol{\tau} \subset K_\mu$  (contact with sticking),  $\boldsymbol{\tau} \subset K_\mu^*$  (no contact) and  $\boldsymbol{\tau} \subset \mathbb{R}^3 - K_\mu \cup K_\mu^*$  (contact with sliding).  $K_\mu^*$  is the polar cone of  $K_\mu$ . This corrector step is explicitly given as follows:

if $\mu \ \boldsymbol{\tau}_t^{i+1}\  < -\tau_n^{i+1}$ then $\mathbf{r}^{i+1} = 0$ ! separating	(23)
elseif $\ \boldsymbol{\tau}_t^{i+1}\  < \mu \tau_n^{i+1}$ then $\mathbf{r}^{i+1} = \boldsymbol{\tau}^{i+1}$ ! sticking	
else $\mathbf{r}^{i+1} = \boldsymbol{\tau}^{i+1} - \frac{(\ \boldsymbol{\tau}_t^{i+1}\  - \mu \tau_n^{i+1})}{(1 + \mu^2)} \left( \frac{\boldsymbol{\tau}_t^{i+1}}{\ \boldsymbol{\tau}_t^{i+1}\ } + \mu \mathbf{m} \right)$ ! sliding	

It is important to emphasize the fact that this explicit formula is valid for both 2D and 3D contact problems with Coulomb's friction and allows us to obtain very stable and accurate results.

#### 4. Hyperelastic bodies undergoing large deformations

Rubber or other polymer materials are said to be hyperelastic. Usually, these kind of materials undergo large deformations. In order to describe the geometrical transformation problems, the deformation gradient tensor is introduced by

$$F_{ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \text{ or } \mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} \tag{24}$$

where  $\mathbf{I}$  is the unity tensor,  $\mathbf{x}$  the position vector and  $\mathbf{u}$  the displacement vector. Because of large displacements and rotations, Green–Lagrangian strain is adopted for the non-linear relationships between strains and displacements. We note  $\mathbf{C}$  the stretch tensor or the right Cauchy–Green deformation tensor ( $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ ). The Green–Lagrangian strain tensor  $\mathbf{E}$  is defined by

$$\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2 \tag{25}$$

In the case of hyperelastic law, there exists an elastic potential function  $W$  (or strain energy density function) which is a scale function of one of the strain tensors, whose derivative with respect to a strain component determines the corresponding stress component. This can be expressed by

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \tag{26}$$

where  $\mathbf{S}$  is the second Piola–Kirchhoff stress tensor. In the particular case of isotropic hyperelasticity [16], (26) can be written by

$$\mathbf{S} = 2 \left[ I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} + \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{C} \right] \quad (27)$$

where  $I_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) denote the invariants of the right Cauchy–Green deformation tensor  $\mathbf{C}$ :

$$I_1 = C_{ii}; \quad I_2 = (I_1^2 - C_{ij}C_{ij})/2; \quad I_3 = \det(\mathbf{C}) \quad (28)$$

The Blatz–Ko constitutive law is used to model compressible foam-type polyurethane rubbers [17]. The strain energy density function is given as follows:

$$W = \frac{G}{2} \left[ \frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right] \quad (29)$$

where  $G$  is the shear modulus. By deriving the energy density (29) with respect to the three invariants, we obtain

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{G}{2} \frac{1}{I_3}; \quad \frac{\partial W}{\partial I_3} = \frac{G}{2} \left[ -\frac{I_2}{I_3^2} + \frac{1}{\sqrt{I_3}} \right] \quad (30)$$

Reporting the result in (27) gives

$$\mathbf{S} = G \mathbf{F}^{-1} \left\{ \sqrt{I_3} \mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1} \right\} \mathbf{F}^{-T} \quad (31)$$

where  $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$  is the left Cauchy–Green deformation tensor associated to  $\mathbf{F}$ . Noting  $J = \sqrt{\det(2\mathbf{E} + \mathbf{I})}$ , the tensor  $\mathbf{S}$  can also be written in function of  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = G \{ J(2\mathbf{E} + \mathbf{I})^{-1} - (2\mathbf{E} + \mathbf{I})^{-2} \} \quad (32)$$

The Cauchy stress (or true stress) tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  is calculated from the second Piola–Kirchhoff stress tensor  $\mathbf{S}$  as follows:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (33)$$

## 5. Finite element formulation of non-linear structures

### 5.1. Total Lagrangian formulation

In the case of dynamic multibody contact problems involving large deformations of hyperelastic solids, the non-linear relation between strains and displacements cannot be ignored. The total Lagrangian formulation was selected in this work to describe non-linear behavior. In the context of the finite element method and with (24) and (25), the Green–Lagrangian strain can be formally written with linear and non-linear terms in function of nodal displacements:

$$\mathbf{E} = \left( \mathbf{B}_L + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}) \right) \mathbf{u} \quad (34)$$

where  $\mathbf{B}_L$  is the matrix which relates the linear strain term to the nodal displacements, and  $\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})$ , the matrix which relates the non-linear strain term to the nodal displacements. From Eq. (34), the incremental form of the strain–displacement relationship is

$$\delta \mathbf{E} = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})) \delta \mathbf{u} \quad (35)$$

Using the principle of virtual displacement, the virtual work  $\delta U$  is given as

$$\delta U = \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \mathbf{A} \dot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \int_{V_0} \mathbf{S} \delta \mathbf{E} dV - \mathbf{F}_{\text{ext}} \delta \mathbf{u} - \mathbf{R} \delta \mathbf{u} = 0 \quad (36)$$

where  $V_0$  is the volume of the initial configuration,  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  the vector of external loads,  $\mathbf{R}$  the contact reaction vector,  $\mathbf{M}$  the mass matrix,  $\mathbf{A}$  the damping matrix,  $\dot{\mathbf{u}}$  the velocity vector and  $\ddot{\mathbf{u}}$  the acceleration vector.

From Eqs. (26)–(31), we obtain

$$\delta \mathbf{S} = \mathbf{D} \delta \mathbf{E} = \mathbf{D}(\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{\text{NL}}(\mathbf{u})) \delta \mathbf{u} \quad (37)$$

where  $\mathbf{D}$  is the current stress–strain tensor which is obtained from the derivative of  $\mathbf{S}$  with respect to  $\mathbf{E}$  in Eq. (32):

$$D_{ijkl} = G \left\{ -2J(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{ik}^{-1}(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{lj}^{-1} + J(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{ik}^{-1}(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{ij}^{-1} + 2[(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{ik}^{-1}(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{lj}^{-2} + (2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{ik}^{-2}(2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{lj}^{-1}] \right\} \quad (38)$$

Substituting  $\delta \mathbf{E}$  from Eq. (35) into Eq. (36) results in

$$\delta U = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \mathbf{A} \dot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \int_{V_0} \mathbf{S}(\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{\text{NL}}(\mathbf{u})) \delta \mathbf{u} dV - \mathbf{F}_{\text{ext}} \delta \mathbf{u} - \mathbf{R} \delta \mathbf{u} = 0 \quad (39)$$

The vector of internal forces is defined by

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \int_{V_0} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{\text{NL}}(\mathbf{u}))^T \mathbf{S} dV \quad (40)$$

Since  $\delta \mathbf{u}$  is arbitrary, a set of non-linear equations can be obtained as

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{A} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_{\text{int}} - \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{R} = 0 \quad (41)$$

It is noted that the stiffness effect is taken into account by the internal forces vector  $\mathbf{F}_{\text{int}}$ . Eq. (41) can be transformed into

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad \text{where } \mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}} - \mathbf{A} \dot{\mathbf{u}} \quad (42)$$

with the initial conditions at  $t = 0$

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_0 \quad \text{and} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad (43)$$

Taking the derivative of  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  with respect to the nodal displacements  $\mathbf{u}$  gives the tangent stiffness matrix as

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}} = \int_{V_0} \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{\text{NL}}(\mathbf{u})) + \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{NL}}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right) dV \quad (44)$$

In addition, by using Eqs. (35) and (37), the tangent stiffness matrix is in fact the sum of the elastic stiffness matrix  $\mathbf{K}_e$ , the geometric stiffness (or initial stress stiffness) matrix  $\mathbf{K}_\sigma$  and the initial displacement stiffness matrix  $\mathbf{K}_u$ :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_u \quad (45)$$

where

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_0} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dV \quad (46)$$

$$\mathbf{K}_\sigma = \int_{V_0} \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{NL}}}{\partial \mathbf{u}} dV \quad (47)$$

$$\mathbf{K}_u = \int_{V_0} (\mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{\text{NL}} + \mathbf{B}_{\text{NL}}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{\text{NL}}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{\text{NL}}) dV \quad (48)$$

## 5.2. First order integration algorithm

We can now integrate Eq. (42) between consecutive time configuration  $t$  and  $t + \Delta t$ . The most common method to do that is the Newmark method which is based on a second order algorithm. However, in impact

problems, higher order approximation does not necessarily mean better accuracy, and may even be superfluous. At the moment of a sudden change of contact conditions (impact, release of contact), the velocity and acceleration are not continuous, and excessive regularity constraints may lead to serious errors. For this reason, Jean [15] has proposed a first order algorithm which is used in this work. This algorithm is based on the following approximations:

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{M} d\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}(\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \dot{\mathbf{u}}^t) \quad (49)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F} dt = \Delta t((1 - \xi)\mathbf{F}^t + \xi\mathbf{F}^{t+\Delta t}) \quad (50)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{R} dt = \Delta t\mathbf{R}^{t+\Delta t} \quad (51)$$

$$\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t = \Delta t((1 - \theta)\dot{\mathbf{u}}^t + \theta\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}) \quad (52)$$

where  $0 \leq \xi \leq 1$ ;  $0 \leq \theta \leq 1$ . In the iterative solution procedure, all the values at time  $t + \Delta t$  are replaced by the values of the current iteration  $i + 1$ ; for example,  $\mathbf{F}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}^{i+1}$ . A standard approximation of  $\mathbf{F}^{i+1}$  gives

$$\mathbf{F}^{i+1} = \mathbf{F}_{\text{int}}^i + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{u}}}(\dot{\mathbf{u}}^{i+1} - \dot{\mathbf{u}}^i) = \mathbf{F}_{\text{int}}^i - \mathbf{K}^i \Delta \mathbf{u} - \mathbf{A}^i \Delta \dot{\mathbf{u}} \quad (53)$$

Finally, we obtain the recursive form of (42) in terms of displacements:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}^i \Delta \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{F}}^i + \bar{\mathbf{F}}_{\text{acc}}^i + \mathbf{R}^{i+1} \\ \mathbf{u}^{i+1} &= \mathbf{u}^i + \Delta \mathbf{u} \end{aligned}} \quad (54)$$

where the so-called effective terms are given by

$$\bar{\mathbf{K}}^i = \xi \mathbf{K}^i + \frac{\xi}{\theta \Delta t} \mathbf{A}^i + \frac{1}{\theta \Delta t^2} \mathbf{M}^i \quad (55)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{acc}}^i = -\frac{1}{\theta \Delta t^2} \mathbf{M}^i \{\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^t - \Delta t \dot{\mathbf{u}}^t\} \quad (56)$$

$$\bar{\mathbf{F}}^i = (1 - \xi)(\mathbf{F}_{\text{int}}^t + \mathbf{F}_{\text{ext}}^t) + \xi(\mathbf{F}_{\text{int}}^i + \mathbf{F}_{\text{ext}}^{t+\Delta t}) \quad (57)$$

At the end of each time step, the velocity is updated by

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \dot{\mathbf{u}}^t + \frac{1}{\theta \Delta t} (\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t) \quad (58)$$

By setting  $\theta = \frac{1}{2}$ , this scheme is then called the implicit trapezoidal rule and it is equivalent to the Tamma–Namburu method in which the acceleration need not be computed [18]. See [19,20] for the interesting comments on time stepping algorithms and on energy conservation.

It is noted that Eq. (54) is strongly non-linear, because of large rotations and large displacements of solid, for instance in multibody contact/impact problems. Besides, as mentioned above, the constitutive law of contact with friction is usually represented by inequalities and the contact potential is even non-differentiable. Instead of solving this equation in consideration of all non-linearities at the same time, Feng [21] has proposed a solution strategy which consists in separating the non-linearities in order to overcome the complexity of calculation and to improve the numerical stability. As  $\Delta \mathbf{u}$  and  $\mathbf{R}$  are both unknown, Eq. (54) cannot be directly solved. First, the vector  $\mathbf{R}$  is determined by the bi-potential method in a reduced system, which only concerns contact nodes. Then, the vector  $\Delta \mathbf{u}$  can be computed in the whole structure, using contact reactions as external loading. It is very important to note that, as opposed to the penalty method or Lagrange multiplier method, the bi-potential method neither changes the global stiffness matrix, nor increases the degrees of freedom. One consequence of this interesting property is that it is easy to implement contact and friction problems in an existing general-purpose finite element code by this method. In addition, the solution procedure is more stable because of the separation of non-linearities and improved numerical algorithms for calculation of contact reactions.

### 5.3. Energy computation

After determining the displacement and the velocity fields, we can calculate different energies. The total elastic strain energy of the contact bodies (discretized by  $n_{el}$  finite elements) is then written by

$$E_e = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} W_e d\Omega \quad (59)$$

The total kinetic energy can be calculated at the global level by

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} \quad (60)$$

Finally, the total energy of the system of solids is

$$E_t = E_e + E_k \quad (61)$$

The case of interest for the analysis presented below corresponds to the homogeneous Neumann problem, characterized by no imposed boundary displacements and no external loading. In addition, if frictionless contact is considered, the total energy should be conserved. For the given examples, this fundamental energy conservation property has been observed.

## 6. Numerical results

The algorithms presented above have been implemented and tested in the finite element code FER/impact [22]. Many application examples, in static or quasi-static cases, have been carried out using the present method [1,21,23].

To illustrate the behavior of a contact/impact simulation by the new algorithm described above, we consider two example applications. For each cases, we assume that no damping exists except for Coulomb friction between contact surfaces, i.e.  $\mathbf{A} = 0$  in Eqs. (41), (42) and (55).

### 6.1. Deformable–rigid impact

This problem concerns the impact of a cylinder made of foam-type polyurethane rubbers into two oblique rigid symmetric surfaces forming a funnel. The characteristics of this example are: shear modulus  $G = 3$  MPa, mass density  $\rho = 700$  kg/m<sup>3</sup>, initial velocity  $v_y = -30$  m/s. The radius of the cylinder is:  $R = 0.01$  m. The total simulation time is  $3 \times 10^{-3}$  s and the solution parameters are:  $\Delta t = 10^{-5}$  s,  $\xi = \theta = 0.5$ . The cylinder is modeled by 209 nodes and 192 linear quadrilateral plane strain elements (Fig. 2). The initial position of the

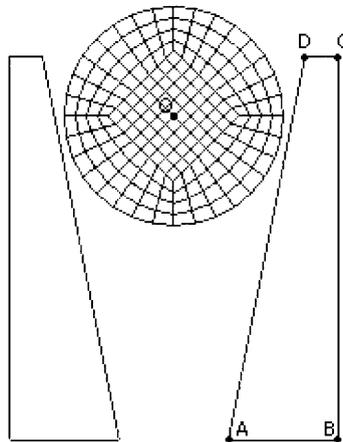


Fig. 2. Deformable–rigid impact.

cylinder is given by its center point  $O(0.0,0.03)$ . The right part of the rigid block is defined by  $A(0.005,0.0)$ ,  $B(0.015,0.0)$ ,  $C(0.015,0.035)$  and  $D(0.012,0.035)$ .

Three cases A, B and C are considered (Table 1). It is noted that these analyses were performed on a PC (Pentium 4/2.8 GHz). Fig. 3 shows the Von-Mises stress distribution in the cylinder at the moment when the cylinder reaches its lowest position and the kinetic energy  $E_k$  equals zero (see Figs. 6–8). The CPU time to achieve the solution and the maximum value of the Von-Mises stress are also given in Table 1. We observe apparent differences concerning the values and the localization of the maximum stress. In Case A, the cylinder goes down lower so as to be more deformed. Therefore, the stress value is higher. When the friction increases, the cylinder does not go down as low, braked by the friction forces. The localization of the maximum stress moves to the contact surfaces because friction forces are added onto the surfaces in contact, as shown in Fig. 3. The deformed configurations at time  $t = 2$  ms are shown in Fig. 4. The displacement of the center point O

Table 1  
Influence of friction coefficients

Case	At time (ms)	$\sigma_{\max}$ (MPa)	CPU time (s)
A: $\mu = 0.0$	0.87	8.192	62
B: $\mu = 0.2$	0.70	4.523	77
C: $\mu = 0.4$	0.61	4.396	83

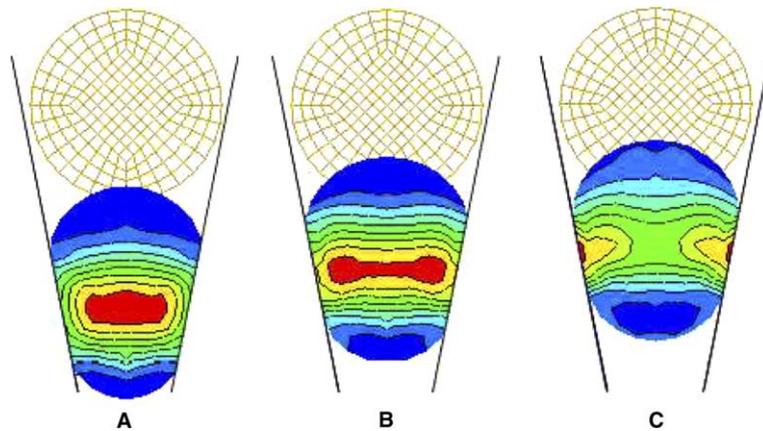


Fig. 3. Isovalues of Von-Mises stress.

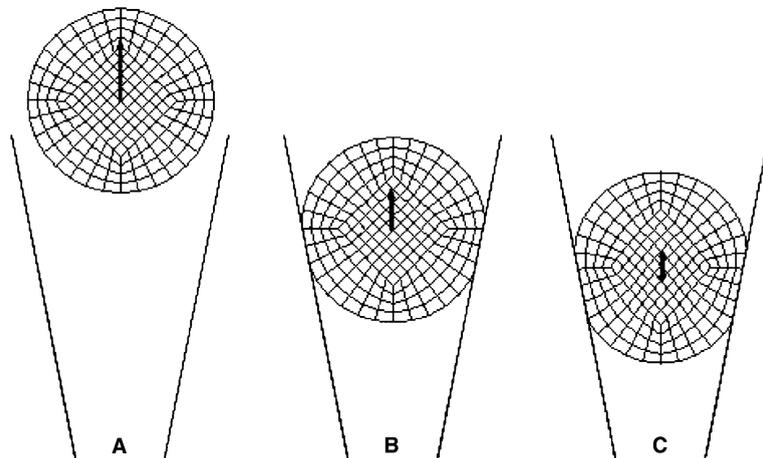


Fig. 4. Deformed configurations at time  $t = 2$  ms.

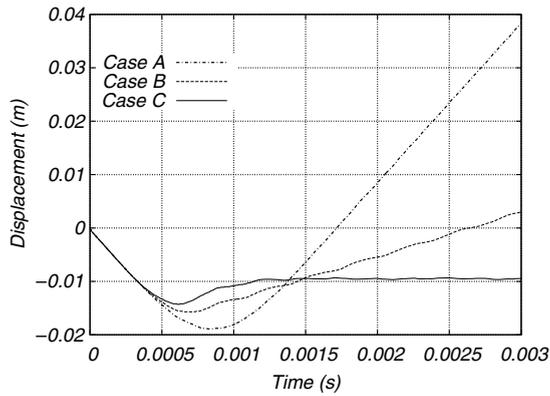


Fig. 5. Displacement of point O.

versus time is plotted in Fig. 5. For the three cases, Figs. 6–8 show the plots of the kinetic energy  $E_k$ , the elastic strain energy  $E_e$  and the total energy  $E_t$ . For Case A, the cylinder rebounds with the same velocity as the initial velocity, as there is no energy loss in the system (see Fig. 6). For Case B, the cylinder rebounds too but with smaller velocity than the initial velocity, as there is energy loss in the system (see Fig. 7). By taking into account more important friction (Case C), after a jump up, the cylinder sticks to the contact surfaces and

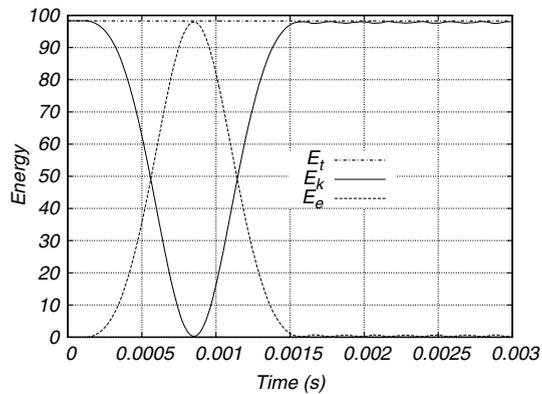


Fig. 6. Energy evolution ( $\mu = 0.0$ ).

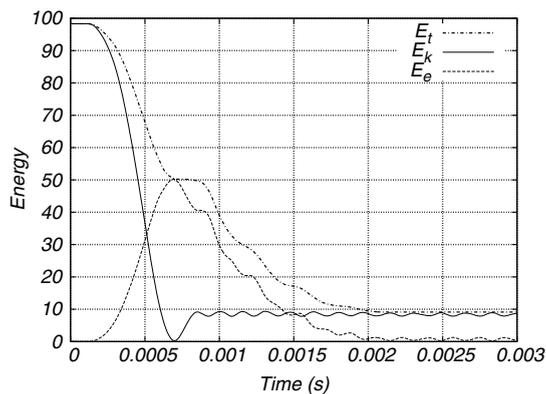


Fig. 7. Energy evolution ( $\mu = 0.2$ ).

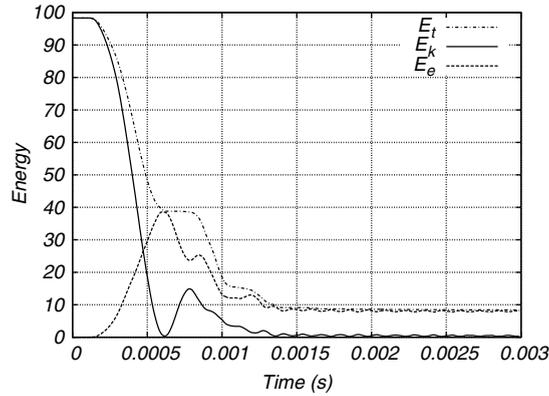


Fig. 8. Energy evolution ( $\mu = 0.4$ ).

the kinetic energy  $E_k$  tends to zero and thus the cylinder is locked (see Fig. 8). Furthermore, the elastic deformation is smaller, as compared to the frictionless case A.

We observe that the total energy is perfectly conserved in the case of frictionless contact (Fig. 6). However, in the case of frictional contact, the total energy decreases (Figs. 7 and 8). So the total energy is dissipated by frictional effects as expected. It is worth noting that the dissipated energy is quantitatively calculated. It is also interesting to examine another question: is the dissipated energy proportional to the friction coefficient? The answer is not according to numerical results. The proof is illustrated by Figs. 7 and 8 in which we observe almost the same dissipated energy even with two different friction coefficients. In fact, when the friction coefficient increases, the friction forces increase. However, the tangential slips will decrease (Fig. 3). We know that the dissipated energy depends not only on the friction forces but also on the tangential slips on the contact surface.

We observed another interesting result in this study when comparing the cases B and C. In Case B (Fig. 7), the kinetic energy tends to a constant value and the elastic strain energy equals zero after the impact. On the contrary, in Case C (Fig. 8), the kinetic energy tends to zero and the elastic strain energy is not released. As expected, the cylinder is locked inside the funnel. For both cases, the total energy remains almost the same.

## 6.2. Deformable–deformable–rigid impact

In order to show the ability of the algorithms developed to deal with multi-zones contact/impact problems, we propose a second example which simulates the impact of a deformable cylinder onto a deformable block and the later is posed onto a rigid foundation. So the contact occurs not only between the cylinder and the block but also between the block and the rigid foundation. The material characteristics of the two hyperelastic bodies are: shear modulus  $G = 3$  MPa, mass density  $\rho = 700$  kg/m<sup>3</sup>. The initial velocity of the cylinder is:

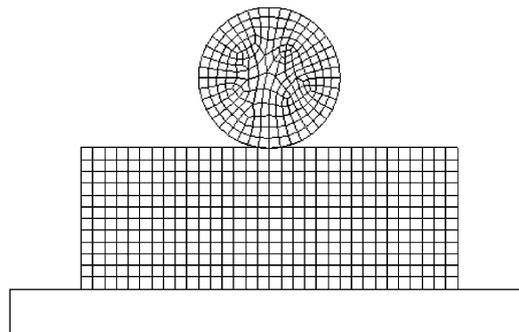


Fig. 9. Deformable–deformable–rigid impact.

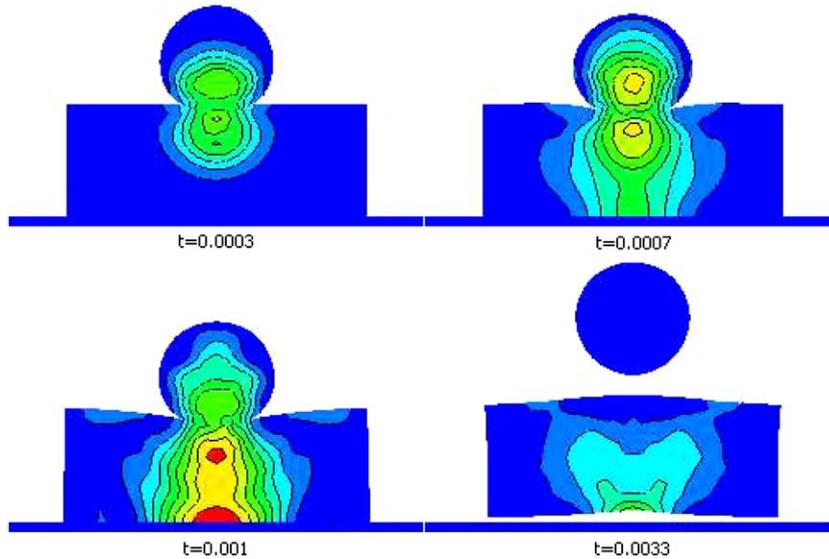


Fig. 10. Isovalues of Von-Mises stress.

$v_y = -20$  m/s. The radius of the cylinder is:  $R = 0.025$  m. The geometric sizes of the block are: height  $l = 0.06$  m and width  $L = 0.16$  m. The total simulation time is  $5 \times 10^{-3}$  s and the solution parameters are:  $\Delta t = 10^{-5}$  s,  $\xi = \theta = 0.5$ . The cylinder and the block are modeled respectively by 239 and 429 nodes for 384 and 118 linear quadrilateral plane strain elements (Fig. 9).

Fig. 10 shows the distribution of the Von-Mises stress in the two deformable bodies during the simulation. It is interesting to note that the block jumps up under the impact of the cylinder.

## 7. Conclusion

In this paper, we have presented the recent development of the bi-potential method applied to dynamic analysis of two-dimensional contact problems with Coulomb friction between Blatz–Ko hyperelastic bodies. The algorithm has been described and investigated numerically for two problems using different coefficients of friction. From numerical experiments, we have found that:

- The algorithm is simple and efficient:
  - no modification of the global stiffness matrix;
  - no regularization of contact and friction laws;
  - accurate calculation of contact forces in a reduced system;
  - first order time stepping instead of second or higher order integration.
- The total energy is well conserved in the case of frictionless contact of solids.
- The algorithm permits to determine quantitatively the physical energy dissipation by frictional effects.
- The locking and jumping phenomena are numerically illustrated.

We have felt that this approach could easily be extended to three-dimensional dynamic contact problems including non-linear material constitutive laws and more complex frictional models [24]. This work is being undertaken.

## References

- [1] Z.Q. Feng, F. Peyraut, N. Laped, Solution of large deformation contact problems with friction between Blatz–Ko hyperelastic bodies, *Int. J. Eng. Sci.* 41 (2003) 2213–2225.

- [2] N. Kikuchi, J.T. Oden, *Contact Problems in Elasticity: a Study of Variational Inequalities and Finite Elements*, SIAM, Philadelphia, 1988.
- [3] Z.H. Zhong, *Finite Element Procedures in Contact–Impact Problems*, Oxford University Press, Oxford, 1993.
- [4] P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics*, John Wiley & Sons, 2002.
- [5] G. De Saxcé, Z.Q. Feng, The bi-potential method: a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms, *Math. Comput. Model.* 28 (4–8) (1998) 225–245 (Special issue, Recent Advances in Contact Mechanics).
- [6] H.M. Hilber, T.J.R. Hughes, R.L. Taylor, Improved numerical dissipation for the time integration algorithms in structural dynamics, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.* 5 (1977) 283–292.
- [7] T.J.R. Hughes, R.L. Taylor, J.L. Sackman, A. Curnier, W. Kanoknukulchai, A finite element method for a class of contact–impact problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 8 (1976) 249–276.
- [8] P. Wriggers, T. Vu Van, E. Stein, Finite element formulation of large deformation impact contact problems with friction, *Comput. Struct.* 37 (1990) 319–331.
- [9] F. Armero, E. Petocz, Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 158 (1998) 269–300.
- [10] F. Armero, E. Petocz, A new dissipative time-stepping algorithm for frictional contact problems: formulation and analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 179 (1999) 151–178.
- [11] T.A. Laursen, V. Chawla, Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 40 (1997) 863–886.
- [12] T.A. Laursen, G.R. Love, Improved implicit integrators for transient impact problems geometric admissibility within the conserving framework, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 53 (2002) 245–274.
- [13] G.R. Love, T.A. Laursen, Improved implicit integrators for transient impact problems dynamic frictional dissipation within an admissible conserving framework, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 192 (2003) 2223–2248.
- [14] O.C. Zienkiewicz, W.L. Wood, L.W. Hine, R.L. Taylor, A unified set of single step algorithms. Part 1. General formulation and application, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 20 (1984) 1529–1552.
- [15] M. Jean, Dynamics with partially elastic shocks and dry friction: double scale method and numerical approach, in: *Proceedings of the 4th Meeting on unilateral problems in structural analysis*, Capri, 1989.
- [16] P.G. Ciarlet, *Elasticité Tridimensionnelle*, Masson Collection RMA, 1985.
- [17] P.J. Blatz, W.L. Ko, Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials, *Trans. Soc. Rheol.* 6 (1962) 223–251.
- [18] T.K. Kamma, R.R. Namburu, A robust self-starting explicit computational methodology for structural dynamic applications: architecture and representations, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 30 (1990) 1441–1454.
- [19] J.C. Simo, K.K. Wong, Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 31 (1991) 19–52.
- [20] F. Armero, I. Romero, On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for nonlinear dynamics. Part I: low-order methods for two model problems and nonlinear elastodynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 190 (2001) 2603–2649.
- [21] Z.Q. Feng, 2D or 3D frictional contact algorithms and applications in a large deformation context, *Commun. Numer. Methods Eng.* 11 (1995) 409–416.
- [22] <http://gmfe16.cemif.univ-evry.fr:8080/~feng/FerSystem.html>.
- [23] Z.Q. Feng, Some test examples of 2D and 3D contact problems involving Coulomb friction and large slip, *Math. Comput. Model.* 28 (4–8) (1998) 469–477 (Special issue, Recent Advances in Contact Mechanics).
- [24] M. Hjjaj, Z.Q. Feng, G. De Saxcé, Z. Mróz, Three-dimensional finite element computations for frictional contact problems with non-associated sliding rule, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 60 (2004) 2045–2076.

# A material-independent algorithm for preserving of the orientation of the spatial basis attached to deforming medium

François Peyraut · Zhi-Qiang Feng · Nadia Laped

Received: 6 October 2006 / Accepted: 18 January 2007 / Published online: 15 February 2007  
© Springer-Verlag 2007

**Abstract** The aim of the paper is to propose an algorithm to satisfy the orientation-preserving condition with hyperelastic materials. This algorithm is shown to be applicable for many material models. Its efficiency is assessed by numerical examples involving the Blatz–Ko, the Ogden and the Gent models.

**Keywords** Orientation-preserving condition · Finite element analysis · Compressible hyperelasticity

## 1 Introduction

Many industrial applications are concerned by foam-like or rubber-like materials. The tire technology is for example one of the main application fields of rubber-like shells. Such materials are also used to improve the performance of safety glass by using interlayers to join the splinters in the case of a crash [4]. Another application for the automotive industry is the use of polyurethane foams for a better comfort of car seats [18]. All these

materials are highly non linear and require specific and robust techniques to perform numerical computation.

In the last decades, many attempts have been made to solve non linear problems, including hyperelastic materials, with the finite element method. A very detailed review on the finite element formulation for non linear analysis, including two and three dimensional problems and involving isotropic, orthotropic, rubber-like and elasto-plastic materials, has been provided by Sussman and Bathe [21]. But some numerical topics related to the compressible hyperelasticity are still questionable. For example, in the case of the Blatz–Ko material, the loss of ellipticity leads to numerical problems near the breaking loading values [14]. More generally, existence and uniqueness of the solution can be discussed on the issue of ellipticity, polyconvexity and convexity of the energy density required to model the material behavior [3, 10, 20]. Moreover, it has been proven that the Newton–Raphson algorithm diverges if the orientation-preserving condition is not satisfied [15]. To prevent divergence in case of an orientation-preserving loss, an algorithm based on the eigenvalues of the deformation gradient has been proposed by the authors [16]. By using eigenvalues instead of the determinant, this algorithm can deal with any geometrical case (volume, area or line) while the classical condition based on the determinant only works for preserving volumes. By considering the Blatz–Ko hyperelastic model [2], this algorithm has already been found efficient for various geometrical cases, boundary conditions and applied loads [13, 15]. The aim of this paper is to establish the fact that this algorithm, previously applied to the single case of the Blatz–Ko hyperelastic model, is indeed efficient for any kind of behavior laws. We actually prove its independency on material models because it is found to be free of

---

F. Peyraut  
LERMPS, Université de Technologie de Belfort-Montbéliard,  
90010 Belfort, France  
e-mail: francois.peyraut@utbm.fr

Z.-Q. Feng (✉)  
Laboratoire de Mécanique d'Evry,  
Université d'Evry-Val d'Essonne,  
40 rue du Pelvoux, 91020 Evry, France  
e-mail: feng@iup.univ-evry.fr

N. Laped  
Laboratoire Mécatronique3M,  
Université de Technologie de Belfort-Montbéliard,  
90010 Belfort, France  
e-mail: nadia.laped@utbm.fr

any material consideration. Since it can be applied to any material model, any geometry, any boundary condition and any external applied force, the proposed approach is thus very general and suitable for many non-linear mechanics applications. To assess its efficiency, several computations were performed with various hyperelastic models such as the Blatz–Ko [2], the Ogden [12] and the Gent [8] ones. It has been implemented in the university finite element code FER developed by the Mechanical Laboratory of Evry University [5].

## 2 Compressible hyperelasticity

Rubber or other polymer materials are said to be hyperelastic. Usually, these kinds of materials undergo large deformations. Let  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{X}$  denote the position vectors of a particle in the current and reference configurations of a deformable body. If we consider the framework of large deformations with Lagrangian description, the motion of this body, relative to a reference configuration, is specified by a smooth vector function  $\mathbf{x} = \Phi_t(\mathbf{X})$ . It is usual to introduce the displacement vector  $\mathbf{u}$  such that

$$\mathbf{x} = \Phi_t(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (1)$$

In order to describe the geometrical transformation of one particle, the deformation gradient tensor is introduced by

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \Phi_t(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} \quad (2)$$

where  $\mathbf{I}$  is the unity tensor and  $\nabla \mathbf{u}$  the displacement gradient tensor.

Because of large displacements and rotations, Green–Lagrangian strain measure is adopted to describe the nonlinear relationships between strains and displacements. We denote  $\mathbf{C}$  the right Cauchy–Green strain tensor ( $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ ). The Green–Lagrangian strain tensor  $\mathbf{E}$  is defined by

$$\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2 \quad (3)$$

In the case of hyperelastic laws, there exists an elastic potential function  $W$  (or strain energy density function) which is a scalar function of one of the strain tensors, whose derivative with respect to a strain component determines the corresponding stress component. This can be expressed by

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \quad (4)$$

where  $\mathbf{S}$  is the second Piola–Kirchhoff stress tensor. In the particular case of isotropic hyperelasticity [3], Eq. (4)

can be written by

$$\mathbf{S} = 2 \left[ I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} + \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{C} \right] \quad (5)$$

where  $I_i (i = 1, 2, 3)$  denote the invariants of the right Cauchy–Green strain tensor  $\mathbf{C}$

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}); \quad I_2 = \frac{1}{2} \left[ I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2) \right]; \quad I_3 = \det(\mathbf{C}) \quad (6)$$

where  $\text{tr}(\cdot)$  and  $\det(\cdot)$  denote respectively the trace and the determinant of a tensor.

### 2.1 Blatz–Ko constitutive law

The Blatz–Ko constitutive law is used to model compressible foam-type polyurethane rubbers [2]. The strain energy density function is given by

$$W = \frac{\mu}{2} f \left[ I_1 - 1 - \frac{1}{\nu} + \frac{(1-2\nu)}{\nu} I_3^{-\nu/(1-2\nu)} \right] + \frac{\mu}{2} (1-f) \left[ \frac{I_2}{I_3} - 1 - \frac{1}{\nu} + \frac{(1-2\nu)}{\nu} I_3^{\nu/(1-2\nu)} \right] \quad (7)$$

where  $\mu$  denotes the shear modulus,  $\nu$  the Poisson's ratio and  $f$  the void ratio. As usual,  $\mu$  is strictly positive and  $\nu$  strictly upper than 0 and lower than 0.5. Lastly,  $f$  is conventionally between 0 and 1.  $W$  appears as an averaged sum with  $f$  and  $1-f$  as weight factors. Such a density is known as the generalized Blatz–Ko density. In the particular case of  $f = 0$  and  $\nu = 0.25$ , Eq. (7) becomes

$$W = \frac{\mu}{2} \left( \frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right) \quad (8)$$

This special Blatz–Ko model has been implemented in the finite element software FER by the authors [6, 16].

### 2.2 Ogden constitutive law

In the case of Ogden constitutive law [12], the strain energy density function  $W$  is split into two parts

$$W(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left( \gamma_1^{\alpha_i/2} + \gamma_2^{\alpha_i/2} + \gamma_3^{\alpha_i/2} - 3 \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i \beta_i} (J^{-\alpha_i \beta_i} - 1) \quad (9)$$

where  $N$ ,  $\mu_i$ ,  $\alpha_i$  and  $\beta_i$  are material parameters. The first part depends on the eigenvalues  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  and  $\gamma_3$  of the right Cauchy–Green strain tensor  $\mathbf{C}$  while the second part only depends on the third invariant  $I_3$  of  $\mathbf{C}$  with  $J = \det(\mathbf{F}) = \sqrt{I_3}$ . The initial shear modulus,  $\mu$ , and the

initial bulk modulus,  $K$ , are given by

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i, \quad K = \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i \left( \frac{1}{3} + \beta_i \right). \quad (10)$$

It is noted that, for  $N = 1$ ,  $\mu_1 = -\mu$ ,  $\alpha_1 = -2$  and  $\beta_1 = 0.5$ , the Blatz–Ko strain energy density [Eq. (8)] is recovered. The implementation of the Ogden’s model in FER has been made by using a limiting technique [19] to take account for the special case of coalescent eigenvalues in which non differentiability takes place. To calculate the constitutive tangent tensor, a spectral decomposition expressed in terms of eigenvalue-bases has been used [7, 11].

### 2.3 Gent constitutive law

The Gent constitutive law is used to model incompressible rubbers [8]. The strain energy density function is given as follows

$$W(I_1) = -\frac{\mu}{2} J_m \ln \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right) \quad (11)$$

where  $\mu$  is the shear modulus and  $J_m$  is the constant limiting value for  $I_1 - 3$ . It is noted that for  $J_m \rightarrow \infty$ , we recover the well-know neo-Hookean strain-energy density

$$W(I_1) = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) \quad (12)$$

The Gent model can be extended to account for the compressibility of the material. A simple and customary way is to append a bulk modulus strain-energy term  $W_H(I_3)$  or  $W_H(J)$  to  $W(I_1)$ . Horgan and Saccomandi [9] proposed the following expression

$$W_H(J) = \frac{1}{d} \left( \frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right) \quad (13)$$

where  $d$  is the material incompressibility parameter. The initial bulk modulus  $K$  is defined as  $K = 2/d$ . For numerical purpose, it proves useful to separate deformation in volumetric and isochoric parts by a multiplicative split of the deformation gradient as

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\text{iso}} \mathbf{F}^{\text{vol}} \quad (14)$$

where

$$\mathbf{F}^{\text{vol}} = J^{1/3} \mathbf{I}, \quad \mathbf{F}^{\text{iso}} = J^{-1/3} \mathbf{F} \quad (15)$$

This decomposition is such that  $\det(\mathbf{F}^{\text{iso}}) = 1$ . It is easy to see that  $\mathbf{F}$  and  $\mathbf{F}^{\text{iso}}$  have the same eigenvectors. The isochoric part of the right Cauchy–Green strain tensor  $\mathbf{C}$  can be then defined as

$$\mathbf{C}^{\text{iso}} = J^{-2/3} \mathbf{C} \quad (16)$$

The first strain invariant of  $\mathbf{C}^{\text{iso}}$  is then defined by  $I_1^* = J^{-2/3} I_1$  which replaces  $I_1$  in  $W(I_1)$ . Finally we consider the following strain-energy density

$$W(I_1^*, J) = -\frac{\mu}{2} J_m \ln \left( 1 - \frac{I_1^* - 3}{J_m} \right) + \frac{1}{d} \left( \frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right) \quad (17)$$

The material parameters of the model are thus defined by the initial shear modulus  $\mu$ , the constant limiting value  $J_m$  and the incompressibility parameter  $d$ .

### 3 Orientation-preserving control

The determinant of the deformation gradient  $\mathbf{F}$  is usually applied to satisfy the orientation-preserving condition. In case of a positive value, the orientation is preserved while it is not if the determinant is negative or zero. But an algorithm based on eigenvalues of  $\mathbf{F}$  is more efficient for some special situations such as the case of the “surface turning inside out”. For example, in case of two negative and one positive eigenvalues (say  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 > 0$ ), the orientation is not necessarily preserved although the determinant is positive

$$\det(\mathbf{F}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0 \quad (18)$$

If we actually consider the undeformed surface  $S_0$  defined by the eigenvectors  $\mathbf{e}_1$  and  $\mathbf{e}_2$  (Fig. 1), the deformed surface  $S$  is defined by  $\mathbf{F} \mathbf{e}_1$  and  $\mathbf{F} \mathbf{e}_2$

$$\mathbf{F} \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{F} \mathbf{e}_2 = \lambda_2 \mathbf{e}_2 \quad (19)$$

Because  $\lambda_1$  (respectively  $\lambda_2$ ) is assumed to be negative,  $\mathbf{F} \mathbf{e}_1$  (respectively  $\mathbf{F} \mathbf{e}_2$ ) is directed on the opposite of  $\mathbf{e}_1$  (respectively  $\mathbf{e}_2$ ). Area  $S$  then results from  $S_0$  by a non-physical “surface turning inside out” process which should be avoided. This process cannot be detected by means of the  $\mathbf{F}$  determinant, positive in the situation examined here due to the two first negative eigenvalues. The determinant of  $\mathbf{F}$ , useful to prevent negative volume, is thus unable to predict the occurrence of negative surface or negative length. To predict such situations, an algorithm based on eigenvalues criterion is presented below.

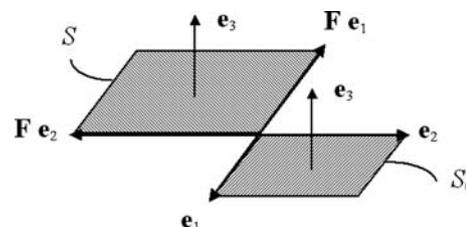


Fig. 1 Surface turning inside out

The eigenvalues  $\lambda_1, \lambda_2$  and  $\lambda_3$  of  $\mathbf{F}$  are solution of the characteristic polynomial

$$\lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J = 0 \tag{20}$$

where  $J_1, J_2$  and  $J$  denote the invariants of  $\mathbf{F}$

$$J_1 = \text{tr}(\mathbf{F}); \quad J_2 = \frac{1}{2} [J_1^2 - \text{tr}(\mathbf{F}^2)]; \quad J = \det(\mathbf{F}) \tag{21}$$

Eq. (20) can be solved in closed form thanks to the Cardano's formula

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= A + B \\ \lambda_2 &= \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)A + \exp\left(-i\frac{2\pi}{3}\right)B \\ \lambda_3 &= \exp\left(-i\frac{2\pi}{3}\right)A + \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)B \end{aligned} \tag{22}$$

where the coefficients  $A$  and  $B$  are defined by

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \tag{23}$$

and the coefficients  $q$  and  $\Delta$  are expressed in terms of the three invariants  $J_1, J_2$  and  $J$

$$\begin{aligned} q &= \frac{-2J_1^3 + 9J_1J_2 - 27J}{27} \\ \Delta &= \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3, \quad p = \frac{3J_2 - J_1^2}{3} \end{aligned} \tag{24}$$

It is well known that the three eigenvalues  $\lambda_1, \lambda_2$  and  $\lambda_3$  are real numbers if  $\Delta$  is negative or zero while two eigenvalues are complex conjugate numbers and the third is a real number if  $\Delta$  is strictly positive.

Because we deal with non linear large deformations, the incremental Newton–Raphson procedure is considered. This procedure is parameterized by a load step value  $\alpha$  selected in the range  $(0, 1]$ . At the first iteration stage, the displacement  $\mathbf{u}_\alpha$  is computed by solving the linear system

$$\mathbf{K}_T \mathbf{u}_\alpha = \alpha \mathbf{P} \tag{25}$$

where  $\mathbf{K}_T$  represents the tangent stiffness matrix and  $\mathbf{P}$  the external loading forces. The principle of the approach is to choose  $\alpha$  in such a way that any occurrence of negative eigenvalues of  $\mathbf{F}$  will be avoided. To address this question, we consider the limiting case  $\alpha = 1$ . Eq. (25) is then reduced to

$$\mathbf{K}_T \mathbf{u}_1 = \mathbf{P} \tag{26}$$

By using the linearity of Eqs. (25) and (26), we notice that

$$\mathbf{u}_\alpha = \alpha \mathbf{u}_1 \tag{27}$$

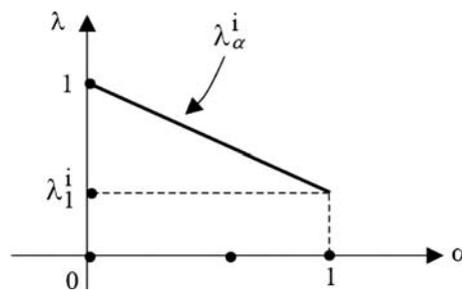


Fig. 2 Linear dependence of  $\lambda_\alpha^i$  on  $\lambda_1^i$

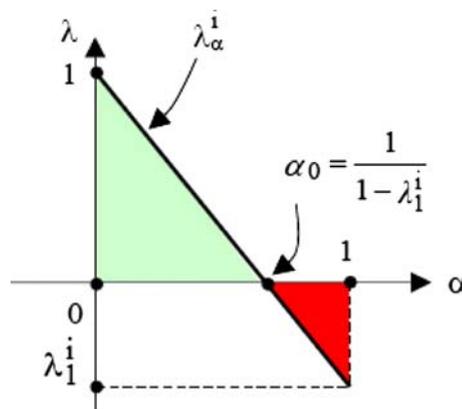


Fig. 3 Optimal load step parameter  $\alpha_0$

The deformation gradient matrix  $\mathbf{F}_\alpha$  can then be expressed as follows

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\alpha &= \mathbf{I} + \nabla(\mathbf{u}_\alpha) = \mathbf{I} + \nabla(\alpha \mathbf{u}_1) \\ &= (1 - \alpha)\mathbf{I} + \alpha [\nabla(\mathbf{u}_1) + \mathbf{I}] = (1 - \alpha)\mathbf{I} + \alpha \mathbf{F}_1 \end{aligned} \tag{28}$$

By denoting  $\lambda_\alpha^i$  ( $i=1,2,3$ ) the eigenvalues of  $\mathbf{F}_\alpha$ , it directly results from Eq. (28) that

$$\lambda_\alpha^i = 1 - \alpha + \alpha \lambda_1^i \tag{29}$$

This shows the linear dependence of  $\lambda_\alpha^i$  on  $\lambda_1^i$  as depicted in Fig. 2. We consider first the case of real eigenvalues. If all eigenvalues of  $\mathbf{F}_1$  are positive, it is obvious from Eq. (29) that all eigenvalues of  $\mathbf{F}_\alpha$  are also positive. In such a situation, the orientation is preserved for any  $\alpha$  selected in the range  $(0, 1]$ . To select the best load step value  $\alpha$ , it is useful to notice that the iterations count number will of course increase if  $\alpha$  decreases. Consequently, the parameter  $\alpha$  has to be chosen as greater as possible to minimize the computational cost. The best value for  $\alpha$  is 1. On the contrary, if at least one eigenvalue of  $\mathbf{F}_1$  is negative or zero (say  $\lambda_1^i \leq 0$ ), the straight line defined by Eq. (29) decreases from 1 to  $\lambda_1^i$  (Fig. 3). By using again Eq.(29), it is easy to find that the intersection between this straight line and the horizontal axis is defined by

$$\alpha_0 = \frac{1}{1 - \lambda_1^i} \tag{30}$$

Because  $\lambda_1^i$  is assumed to be negative or zero, it is noticed that  $\alpha_0 \in (0, 1]$ . The interval  $(0, 1]$  can then be divided in two parts as shown in Fig. 3

$$(0, 1] = \left(0, \frac{1}{1 - \lambda_1^i}\right) \cup \left[\frac{1}{1 - \lambda_1^i}, 1\right] \tag{31}$$

In the first part ( $\lambda_\alpha^i > 0$ ) the orientation is preserved while it is not in the second part ( $\lambda_\alpha^i \leq 0$ ). The parameter  $\alpha$  must then be selected in the range  $\left(0, \frac{1}{1 - \lambda_1^i}\right)$  and the best way to minimize the computational cost is to take  $\alpha$  as close as possible to  $\alpha_0$  defined by Eq. (30). Lastly, because the three eigenvalues of  $\mathbf{F}_1$  have to be considered and because  $\mathbf{F}_1$  depends on the spatial location, Eq. (30) must be applied for each eigenvalue of  $\mathbf{F}_1$  and for each Gauss point of the mesh. The minimum of  $\alpha_0$  over the whole range of eigenvalues has thus to be accounted. It is observed that the optimal load step parameter  $\alpha_0$  given by Eq. (30) represents the transition between the area where orientation is preserved and the area where it is not. The case  $\alpha = \alpha_0$  corresponds to a zero volume. This case is to be avoided by taking  $\alpha < \alpha_0$ . In practice, an integer load step number  $n$  is used rather than a real load step parameter  $\alpha_0$  for the implementation in the finite element software. Thus, the best choice is to relate  $n$  to  $\alpha_0$  as follows

$$n = \text{integer part of } \left(\frac{1}{\alpha_0}\right) + 1 \tag{32}$$

In this way, the condition  $\alpha = \frac{1}{n} < \alpha_0$  is satisfied so that the case of zero or negative volume is excluded. On the other hand, the computation time is optimized because  $n$  provided by Eq. (32) is the smallest load step number.

We consider now the special case of complex eigenvalues. This case occurs with particular loading such as pure torsion applied to a cylinder [17]. If  $\mathbf{F}$  admits complex eigenvalues, it derives from the Cardano’s formulas that one of the three eigenvalues is a real number (say  $\lambda_1$ ) while the two others are complex conjugate numbers ( $\lambda_2 = \bar{\lambda}_3$ ). In this case, the determinant of  $\mathbf{F}$  is expressed as follows

$$\det(\mathbf{F}) = \lambda_1 |\lambda_3|^2 \tag{33}$$

According to Eq. (33), the orientation is preserved if  $\lambda_1$  is strictly positive while it is not if  $\lambda_1$  is negative or equal to zero. Consequently, the numerical approach used to ensure the orientation-preserving condition and described by Eqs. (25)–(32) is applied only to the single real eigenvalue of  $\mathbf{F}$ .

According to Eqs. (30) and (32), the optimal procedure used to satisfy the orientation-preserving

condition is written as follows in the finite element software FER.

1. Initialisation of load step number:  $n = 1$
2. Initialisation of load step parameter:  $\alpha = 1$
3. Computation of  $\mathbf{F}_1$  by applying the Newton–Raphson procedure with  $\alpha = 1$
4. for each Gauss point of the mesh:
  - Computation of  $\mathbf{F}_1$  eigenvalues
  - If at least one  $\mathbf{F}_1$  eigenvalue is negative:
    - Select the minimum negative eigenvalue  $\lambda$
    - Update  $\alpha$  according to Eq.(30):
 
$$\alpha = \min\left(\alpha, \frac{1}{1 - \lambda}\right)$$
    - End if
5. If  $\alpha < 1$ : update the load step number  $n$  according to Eq. (32)
6. If  $n > 1$ : restart the Newton–Raphson algorithm by using  $n$  computed in Step (5).

A Newton–Raphson procedure with a load step value equal to 1 is first performed to compute the optimal load step value (Steps 1–5). Secondly, by using the updated load step value, the Newton–Raphson procedure is restarted to solve the hyperelastic problem (Step 6). This algorithm is also available if the arc length method is used [15].

Since the algorithm described above depends only on the eigenvalues of the deformation gradient  $\mathbf{F}$ , it can be applied to any geometry, boundary condition, applied load and material property. Of course, the optimal load step number  $n$  resulting from Eq. (32) depends indirectly on the studied case through the deformation gradient  $\mathbf{F}$ . But the algorithm does not require any assumption to account for a specific case. In this sense, it appears as very general and free of any material consideration. It can thus be successfully applied to many non linear problems. In the next section, its efficiency and reliability will be studied with numerical examples using various material models.

### 4 Numerical examples

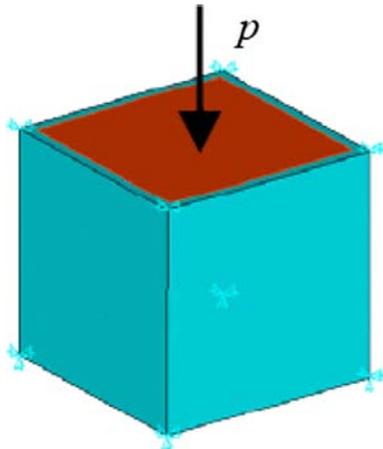
The aim of this section is to assess the efficiency of the orientation-preserving algorithm described in the preceding section. We propose two examples which concern homogeneous and non-homogeneous deformations of a cube.

#### 4.1 Homogeneous deformation

This example concerns a  $0.5 \times 0.5 \times 0.5$  m cube loaded by a uniform pressure  $p = 1$  MPa on its top face (Fig. 4). The cube is assumed to be contained in a rigid box. The

**Table 1** Material parameters

Blatz–Ko	Ogden	Gent
$\mu = 220711.2 \text{ Pa}$	$N=2$	$\mu = 300000 \text{ Pa}$
	$\mu_1 = 1850 \text{ Pa}, \mu_2 = -9200 \text{ Pa}$	$J_m = 97$
	$\alpha_1 = -\alpha_2 = 4.5, \beta_1 = \beta_2 = 1$	$d = 0.001 \text{ Pa}^{-1}$



**Fig. 4** Cube loaded by a uniform pressure in a rigid container

bottom face of the cube is thus clamped and its four lateral faces are simply supported. These boundary conditions are such that the deformation is homogeneous. So one single eight-node brick element is enough for the mesh. Three different behavior laws (Blatz–Ko [2], Ogden [12] and Gent [8] models) are tested for this example. The material parameters for each model are given in Table 1. For each tested hyperelastic model, a fair agreement has been found between the optimal load step value  $n$  predicted by Eq. (32) and numerical computation performed with FER (Table 2). Convergence is actually observed if the optimal load step value predicted by FER is used while divergence occurs as soon as this value is decreased by one.

In order to check whether the results are reliable, additional numerical computations were performed thanks to the multipurpose commercial package ANSYS [1]. It is noted in Table 2 that FER and ANSYS both converge or diverge if the same numerical parameters are used. In order to relate the above results to the orientation-preserving condition, the displacements

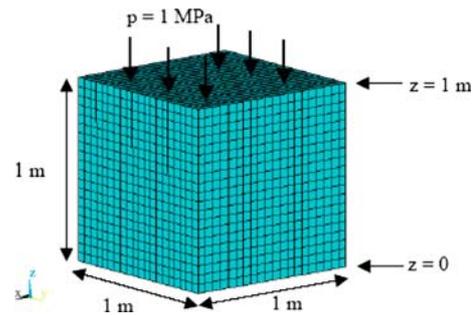
of the cube at the first iteration of the first load step are provided in Table 3.

It is observed that non-physical solutions occur when the load step number is less than the optimal one ( $n - 1$ , for example). In this case, the vertical displacement exceeds the initial height (0.5 m) of the cube (Table 3). That means that the deformed cube crosses the clamped surface and the orientation is then not preserved. Consequently, the Newton–Raphson procedure fails to converge, as expected (Table 2).

The displacement of the top face of the cube after convergence is given in Table 4 using the optimal load step  $n$  and  $n + 10$ . It shows that the displacement is almost the same. This result is quite significant, which demonstrates that the optimal load step  $n$  allows to obtain accurate solutions with the lowest computational cost.

#### 4.2 Non-homogeneous deformation

To assess the efficiency of the method for practical problems of thousand of elements, a numerical three dimensional example was studied. A  $1 \text{ m}^3$  block is loaded by a uniform pressure of 1 MPa and meshed with 8,000 eight-node brick elements (Fig. 5). The bottom of the block is clamped and its top is considered as a rigid surface. The horizontal displacement of the nodes located at  $z = 1 \text{ m}$  are thus restrained and the vertical displacements of these nodes are coupled. The Blatz–Ko model is considered for this application by using the physical property of Table 1. The deformed geometry is presented on Fig. 6 with a true scale factor. It clearly shows that the deformation is non-homogeneous with a deforma-

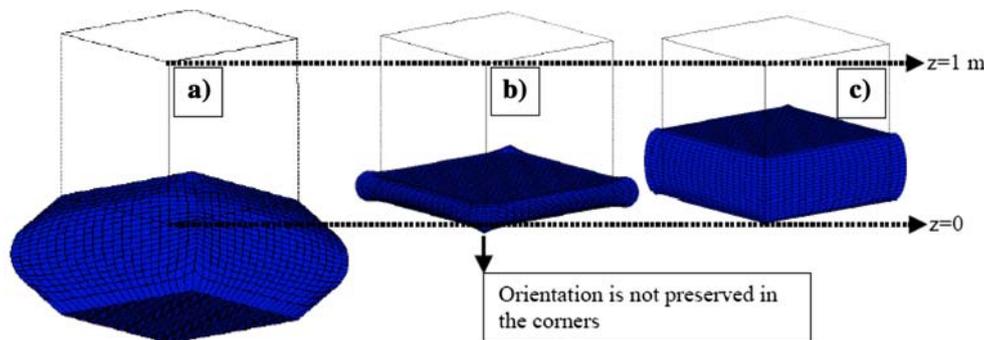
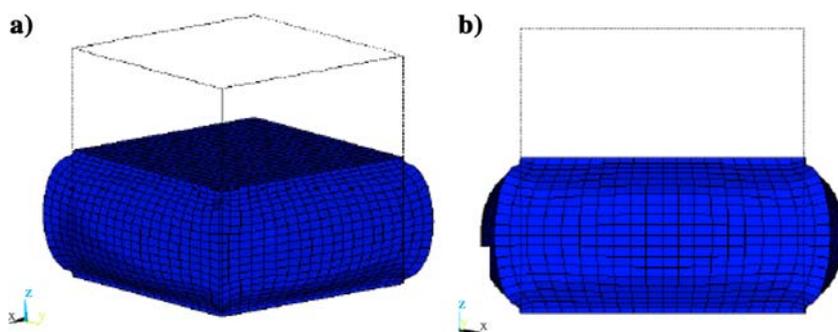


**Fig. 5** Mesh

**Table 2** FER prediction – comparison with ANSYS and FER solutions

Hyperelastic models	Blatz–Ko	Ogden	Gent
Optimal $n$ predicted by FER [Eq. (32)]	2	11	3
FER solution with $n - 1$	Divergence	Divergence	Divergence
ANSYS solution with $n - 1$	Divergence	Divergence	Divergence
FER solution with $n$	Convergence	Convergence	Convergence
ANSYS solution with $n$	Convergence	Convergence	Convergence

**Fig. 6** Deformed geometry. **a** Iso view, **b** side view



**Fig. 7** Deformed geometry – first iteration – first step. **a**  $n = 1$  and **b**  $n = 2$ : orientation is not preserved, **c**  $n = 3$ : orientation is preserved

**Table 3** Displacement of the top face of the cube (m) – first iteration

Step number	Blatz–Ko	Ogden	Gent
$n - 1$	0.755135	0.502765	0.621891
$n$	0.377567	0.457059	0.414594

**Table 4** Displacement of the top face of the cube (m) – after convergence

Step number	Blatz–Ko	Ogden	Gent
$n$	0.217268747	0.279622066	0.322745478
$n + 10$	0.217268747	0.279622066	0.32274548

tion gradient changing from element to element. The deformed geometry presented on Fig. 6 was obtained by using  $n = 3$ . This load step number was predicted by FER to ensure the orientation-preserving condition according to Eq. (32).

If a lower value than 3 is used ( $n = 1$  or 2), we have observed that the Newton–Raphson procedure diverges. Actually, if  $n = 1$ , all the volumes of the deformed elements are negative (Fig. 7a). If  $n = 2$  (Fig. 7b), only a few elements have negative volumes because this case is close to the situation where orientation is preserved ( $n = 3$ ). These elements are located in the vicinity of the four bottom corners of the cube. This divergence is caused by an orientation-preserving loss occurring as

soon as the first iteration of the first step is performed (Fig. 7a,b). It confirms that the predicted value provided by FER is optimal in the sense that any lower values than 3 may cause divergence while convergence is observed for higher values but with a rise of the CPU time.

### 5 Conclusion

In this paper, an original algorithm is presented to enforce the orientation-preserving condition in the framework of large hyperelastic deformations. To prevent any “surface turning inside out” effect, we propose an approach based on the analysis of the eigenvalues of the deformation gradient. It is demonstrated that this approach does not depend on the material properties, the geometry, the boundary conditions neither the external applied forces. This approach is thus very general and can be used to ensure the orientation-preserving condition for many non-linear mechanics problems. Moreover, it has been shown that the proposed approach is optimal in the sense that the orientation-preserving condition is ensured with the lowest computational cost. The detailed flow chart of the implementation of the approach in the finite element software FER is provided. Its efficiency is demonstrated by using different hyperelastic energy densities relative to the Blatz–Ko, the Ogden and the Gent models.

## References

1. ANSYS (2004) Html online documentation, release 8.1
2. Blatz P, Ko W (1962) Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials. *Trans Soc Rheol* 6:223–251
3. Ciarlet P (1988) *Mathematical elasticity. Three-dimensional elasticity*, vol 1. North-Holland, Amsterdam
4. Du Bois PA, Kolling S, Fassnacht W (2003) Modelling of safety glass for crash simulation. *Comput Mater Sci* 28: 675–683
5. Feng ZQ (2001) <http://gmfe16.cemif.univ-evry.fr:8080/~feng/FerSystem.html>
6. Feng ZQ, Peyraut F, Laped N (2003) Solution of large deformation contact problems with friction between Blatz–Ko hyperelastic bodies. *Int J Eng Sci* 41:2213–2225
7. Feng ZQ, Peyraut F, He QC (2006) Finite deformations of Ogden's materials under impact loading. *Int J Non-linear Mech* 41:575–585
8. Gent A (1996) A new constitutive relation for rubber. *Rubber Chem Technol* 69:59–61
9. Horgan C, Saccomandi G (2003) Finite thermoelasticity with limiting chain extensibility. *J Mech Phys Solids* 51: 1127–1146
10. Knowles J, Sternberg E (1975) On the ellipticity of the equations of nonlinear elastostatics for a special material. *J Elast* 5:341–361
11. Morman K (1986) The generalized strain measure with application to nonhomogeneous deformations in rubber-like solids. *J Appl Mech* 53:727–728
12. Ogden R (1984) *Non-linear elastic deformations*. Ellis Horwood, Chichester
13. Peyraut F (2003) Orientation preservation and Newton–Raphson convergence in the case of an hyperelastic sphere subjected to an hydrostatic pressure. *Comp Meth Appl Mech Eng* 192:1107–1117
14. Peyraut F (2004) Loading restrictions for the Blatz–Ko hyperelastic model — application to a finite element analysis. *Int J Nonlinear Mech* 39:969–976
15. Peyraut F, Laped N (2001) Préservation de l'orientation et convergence de Newton–Raphson avec le modèle hyperélastique compressible de Blatz–Ko. *Revue Européenne des Eléments Finis* 10:595–605
16. Peyraut F, Feng ZQ, Laped N (2005) A general convergence condition of the Newton–Raphson algorithm applied to compressible hyperelasticity. *Struct Eng Mech* 21:121–136
17. Polignone D, Horgan C (1991) Pure torsion of compressible nonlinearly elastic circular cylinders. *Q Appl Math* XLIX:7591–607
18. Prudent O, Thionnet A, Gourguechon O, Pajon M, Bakacha M, Renard J (2000) Simulation numérique du confort de sièges d'automobiles : comportement mécanique 3D de mousses de polyuréthane ; optimisation 2D d'un profil simplifié de siège. *Mécanique Industries* 1:511–520
19. Saleeb A, Chang T, Arnold S (1992) On the development of explicit robust schemes for implementation of a class of hyperelastic models in large-strain analysis of rubbers. *Int J Numer Meth Eng* 33:1237–1249
20. Schröder J, Neff P, Balzani D (2005) A variational approach for materially stable anisotropic hyperelasticity. *Int J Solids Struct* 42:4352–4371
21. Sussman T, Bathe K (1987) A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis. *Comput Struct* 26:357–409