

GM / L3 - ME63

UFR -S&T, Université d'Evry – Val d'Essonne

MEF

Méthode des Éléments Finis

Zhi-Qiang FENG (CM, TP)

Christine RENAUD (TD)

Gregory TURBELIN (TP)

<http://lmee.univ-evry.fr/~feng>

<http://lmee.univ-evry.fr/~renaud>

<http://lmee.univ-evry.fr/~turbelin>

Objectifs

- ◆ Apprendre la méthode des éléments finis (MEF)
- ◆ Maîtriser les concepts de base de la modélisation numérique
- ◆ Être capable de résoudre des problèmes mécaniques et physiques
- ◆ Apprendre à utiliser le code industriel ANSYS

Admissibilité : 3/5 examen + 2/5 TP $\geq$ 10/20

Enseignement en calcul des structures à l'UFR-ST

L3

Méthode des éléments finis

↓

M1

Calcul des structures

Optimisation des structures

Poutre, plaque et coque

↓

M2

Codes de calcul

Mécanique non linéaire

Dynamique des structures

Contenu de l'enseignement (ME63)

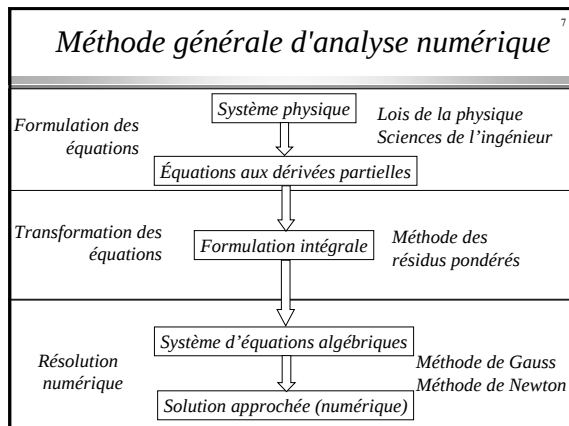
- ◆ introduction
- ◆ méthodes matricielles pour résoudre les problèmes discrets : système ressorts, réseaux électriques, réseaux hydrauliques
- ◆ étapes logiques du calcul par Éléments Finis (EF)
- ◆ principe d'assemblage des matrices élémentaires
- ◆ introduction des conditions aux limites
- ◆ étapes pratiques du calcul par EF
- ◆ problèmes d'équilibre ou de valeurs aux limites
- ◆ approximation et discrétisation

Contenu de l'enseignement (suite)

- ◆ formulation intégrale
- ◆ méthode de résidus pondérés (Galerkin, méthode de collocation ...)
- ◆ éléments finis 1D, 2D et 3D
- ◆ systèmes de coordonnées
- ◆ éléments de référence et fonctions de forme
- ◆ transformation des dérivations et des intégrales
- ◆ intégration numérique (méthode de Gauss)
- ◆ équation aux dérivées partielles décrivant les phénomènes physiques rencontrés par l'ingénieur

Contenu de l'enseignement (suite)

- ◆ passage du continu au discret
- ◆ conditions aux limites portant sur la dérivée
- ◆ application en thermique (transfert de chaleur par conduction et convection)



Connaissances requises et à acquérir ⁸

- ◆ L'analyse numérique fait appel aux connaissances dans les trois domaines suivants :
 - ◆ Sciences de l'ingénieur pour établir les équations
 - ◆ Méthodes numériques pour transformer ces équations
 - ◆ Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur l'ordinateur.

Bibliographies ⁹

- ◆ Livres :
 - ◆ The Finite Element Method
O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor
 - ◆ Une présentation de la méthode des éléments finis
G. Dhatt et G. Touzot
 - ◆ Modélisation des structures par éléments finis
J.L. Batoz et G. Dhatt

Bibliographies (suite) ¹⁰

- ◆ Revues :
 - ◆ Int. J. for Numerical Methods in Engineering
 - ◆ Computers & Structures
 - ◆ Revue Européenne de Mécanique Numérique

Codes de calcul ¹¹

- ◆ NASTRAN, ANSYS, ABAQUS, ADINA, SAP, MARC, I-DEAS, DYNA3D, PAM/System, RADIOSS, SAMCEF, ...
- ◆ MEF/MOSAIC, SYSTUS, CESA, CASTEM, ASTOR, ASTER, ZEBULON, MODULEF, ...
- ◆ à l'UFR-ST : ANSYS, COSMOS, I-DEAS, CASTEM, FER/Solid, FER/Contact, ...

Domaines d'application de la MEF ¹²

- ◆ analyse linéaire (statique et dynamique)
- ◆ analyse non linéaire (grands déplacements, grandes déformations, contact et frottement, flambage, ...)
- ◆ mise en forme des matériaux
- ◆ thermique (en régime permanent et transitoire, ...)
- ◆ mécanique des fluides
- ◆ électromagnétisme
- ◆ dynamique rapide (choc, impact, crash)
- ◆ optimisation des structures

13

Secteurs d'utilisation de la MEF

- ◆ génie mécanique
- ◆ génie civile
- ◆ transport
- ◆ aéronautique
- ◆ espace
- ◆ nucléaire
- ◆ énergétique
- ◆ militaire
- ◆

14

Exemple: butée de choc

- Grandes déformations
- Matériau: caoutchouc
- Mooney-Rivlin: hyperélasticité incompressible
- Auto-contact multi-zones

DEMO

15

Exemple: Projection à plasma

DEMO

16

Problèmes d'équilibre (Système discret)

◆ Pour un système **discret** (système de ressorts, réseaux électriques, réseaux hydrauliques,...), les équations de comportement peuvent en général s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[K] \{U\} = \{F\}$$

[K] - matrice caractérisant le système
{U} - variables inconnues du problème
DDL – Degré De Liberté
DOF – Degree Of Freedom
{F} - sollicitations connues (second membre)

17

Signification (1D)

Problème	K	U	F
Ressort	raideur k	déplacement	force
Barre T/C	rigidité EA/L	déplacement	force
Thermique	conductivité $\alpha A/L$	température	flux de chaleur
Electricité	résistivité 1/R	potentiel	intensité
Ecoulement	perméabilité $\alpha A/L$	charge hydraulique	débit

18

Principes de la MEF

◆ La MEF est basée sur une idée simple : subdiviser (**discrétiser**) une forme complexe en un grand nombre de sous-domaines élémentaires de forme géométrique simple (**éléments finis**) interconnectés en des points appelés **nœuds**.

Principes de la MEF (suite)

19

- ◆ Nous considérons le comportement mécanique de chaque élément séparément, puis nous **assemblons** ces éléments de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.
- ◆ La MEF utilise des **approximations** simples des variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.
- ◆ Les nœuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière, mais sont basés sur des considérations de **précision de l'approximation**.

Étapes logiques du calcul par éléments finis

20

1. Définir les nœuds et les éléments (Créer le maillage)
2. Pour chaque élément, établir la matrice de rigidité élémentaire $[k^e]$ reliant les degrés de liberté (déplacements) nodaux $\{u^e\}$ et les forces $\{F^e\}$ appliquées aux nœuds : $[k^e] \{u^e\} = \{F^e\}$
3. Assembler les matrices et les vecteurs élémentaires en un système global $[K] \{U\} = \{F\}$ de manière à satisfaire les conditions d'équilibre aux nœuds
4. Modifier le système global en tenant compte des conditions aux limites
5. Résoudre le système $[K] \{U\} = \{F\}$ et obtenir les déplacements $\{U\}$ aux nœuds
6. Calculer les gradients (flux de chaleur, déformations et contraintes) dans les éléments et les réactions aux nœuds sur lesquels les conditions aux limites sont imposées.

Assemblage $\{k^e\}, \{F^e\} \implies [K], \{F\}$

21

- ◆ construction de la matrice étendue $[K^e]$ et du vecteur étendu $\{F^e\}$ de chaque élément

$$[K^e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k^e] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{F^e\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \{f^e\} \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- ◆ addition des matrices et des vecteurs étendus

$$[K] = [K^1] + [K^2] + \dots = \sum_e [K^e]$$

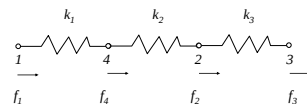
$$\{F\} = \{F^1\} + \{F^2\} + \dots = \sum_e \{F^e\}$$

Exemple

Introduction des conditions aux limites

22

- ◆ méthode du terme diagonal dominant
- ◆ méthode du terme unité sur la diagonal
- ◆ méthode de suppression des équations

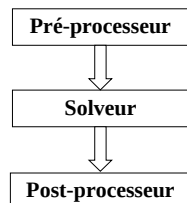


Exemple

Étapes pratiques du calcul par EF

23

Organisation générale d'un code de calcul



Pré-processeur

24

- ◆ Choisir le type d'éléments
- ◆ Entrer les propriétés géométriques
- ◆ Entrer les paramètres physiques
- ◆ Créer le modèle géométrique
- ◆ Créer le maillage : définir les nœuds et les éléments
- ◆ Appliquer les sollicitations
- ◆ Imposer les conditions aux limites

25

Solveur

- ◆ Choisir le type d'analyse (statique, dynamique,...)
- ◆ Construire la matrice et le vecteur élémentaire $[k^e]$, $\{f^e\}$
- ◆ Assembler $[k^e]$ et $\{f^e\}$ dans $[K]$ et $\{F\}$
- ◆ Prendre en compte les conditions aux limites
- ◆ Résoudre le système d'équations $[K] \{U\} = \{F\}$
- ◆ Calculer les variations additionnelles (gradients, réactions, σ , ϵ ...)

26

Post-processeur

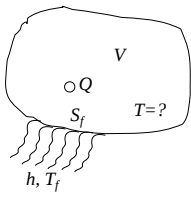
- ◆ Présenter les résultats de façon intelligible et synthétique :
 - ◆ sous forme numérique
 - ◆ sous forme graphique
- ◆ Effectuer des fonctions complémentaires : combinaisons, interprétations, interpolations, animation, ...

Demo ANSYS

27

Problèmes d'équilibre (système continu)

◆ Pour un système **continu**, prenons comme exemple le problème thermique :



$$K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q = 0 \text{ dans } V$$

$$K \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_f) \text{ sur } S_f$$

Comment ???

$[K] \{U\} = \{F\}$

28

Système continu

◆ D'une manière générale, le comportement d'un système continu est décrit par les équations aux dérivées partielles (EDP):

$$L(u) + f_v = 0 \text{ sur un domaine } V$$

$$C(u) = f_s \text{ sur la frontière } S \text{ de } V$$



L , C - opérateurs différentiels caractérisant le système,

u - fonctions inconnues,

f_v , f_s - fonctions connues appelées sollicitations.

29

Approximation

◆ Un modèle mathématique d'un système physique fait intervenir plusieurs variables ou fonctions, dites exactes $u_{ex}(x)$: températures, déplacements, potentiels, vitesse, etc. Celles-ci sont représentées par des fonctions "approchées" $u(x)$ telles que la différence :

$$e(x) = u(x) - u_{ex}(x)$$

soit "petite" (de l'ordre de grandeur de la précision désirée).

30

Construction d'une fonction approchée (Étape 1)

◆ Choisir un ensemble fini de fonctions dépendant de n paramètres a_i : $u(x, a_1, a_2, \dots, a_n) = u(x)$

$$u(x) = P_1(x) a_1 + P_2(x) a_2 + \dots + P_n(x) a_n = \langle P \rangle \{a\}$$

◆ Les fonctions sont souvent choisies de manière à être faciles à évaluer, à intégrer ou dériver explicitement.

- ◆ Polynômes: $u(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}$
- ◆ fonctions trigonométriques:

$$u(x) = a_1 \sin(\pi x) + a_2 \sin(2\pi x) + \dots + a_n \sin(n\pi x)$$

Construction d'une fonction approchée
(Étape 2)

31

◆ Déterminer les paramètres $a_1, a_2, \dots, a_n$ en faisant coïncider $u_{ex}(x)$ et $u(x)$ en n points $x_1, x_2, \dots, x_n$, c'est-à-dire en annulant $e(x)$ en ces n points.

L'approximation peut fournir

- ◆ une solution approchée en tout point x d'une fonction difficile à évaluer ou connue seulement en certains points.
- ◆ une solution approchée d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles.

Exemple

Approximation nodale

32

◆ En général, les paramètres $a_1, a_2, \dots, a_n$ n'ont pas de sens physique. Cependant nous pouvons choisir comme paramètres a_i les valeurs de la fonction $u_{ex}(x)$ en n points appelés NOEUDS de coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$. Imposons de plus que la fonction approchée $u(x)$ coïncide avec la fonction exacte $u_{ex}(x)$ en ces nœuds.

$$u(x_1) = u_{ex}(x_1) = u_1$$

$$u(x_2) = u_{ex}(x_2) = u_2$$

.....

$$u(x_n) = u_{ex}(x_n) = u_n$$

Approximation nodale

33

◆ La fonction approchée (approximation globale)

$$u(x) = P_1(x) a_1 + P_2(x) a_2 + \dots + P_n(x) a_n = \langle P(x) \rangle \{a\}$$

s'écrit alors (approximation nodale) :

$$u(x) = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2 + \dots + N_n(x) u_n = \langle N(x) \rangle \{u^e\}$$

◆ Définitions :

- $\{a\}$ - paramètres généraux de l'approximation
- $\{u^e\}$ - variables nodales de l'approximation
- $\langle P(x) \rangle$ - fonctions de base de l'approximation
- $\langle N(x) \rangle$ - fonctions d'interpolation (*fonctions de forme*)

Approximation nodale

34

◆ L'approximation nodale possède deux propriétés fondamentales :

- 1) comme $u(x_i) = u_i$, les fonctions N_i vérifient :
$$N_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$
- 2) l'erreur d'approximation s'annule en tous les nœuds x_i

$$e(x_i) = 0$$

Exemple

Approximation nodale

35

◆ La méthode d'approximation nodale d'une fonction d'une variable s'étend directement à l'approximation de plusieurs fonctions de plusieurs variables.

◆ EXEMPLE : déplacements d'une structure 3D

$$u(x,y,z) = \langle N(x,y,z) \rangle \{u_n\}$$

$$v(x,y,z) = \langle N(x,y,z) \rangle \{v_n\}$$

$$w(x,y,z) = \langle N(x,y,z) \rangle \{w_n\}$$

Discrétisation
Approximation nodale par sous-domaines

36

◆ La construction d'une fonction approchée $u(x)$ est difficile lorsque le nombre de nœuds et donc de paramètres inconnus u_i devient important. Le problème se complique encore si le domaine V a une forme complexe et si la fonction $u(x)$ doit satisfaire des conditions aux limites sur la frontière de V .

◆ La méthode d'approximation nodale par sous-domaines simplifie la construction de $u(x)$. Elle consiste à :

- ◆ identifier un ensemble de sous-domaines V_e du domaine V .
- ◆ définir une fonction approchée $u_e(x)$ différente sur chaque sous-domaine par la méthode d'approximation nodale. Chaque fonction $u_e(x)$ peut dépendre des variables nodales d'autres sous-domaines comme c'est le cas dans l'approximation de type "Spline".

37

Discrétisation

Approximation nodale par éléments finis

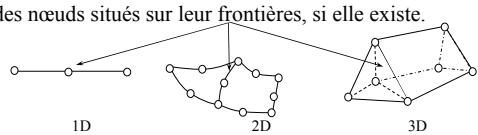
- ◆ La méthode d'approximation nodale par éléments finis est une méthode particulière d'approximation nodale par sous-domaines qui présente les particularités suivantes :
 - ◆ L'approximation nodale sur chaque sous-domaine V_e ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des nœuds situés sur V_e et sur sa frontière.
 - ◆ Les fonctions approchées $u_e(x)$ sur chaque sous-domaine V_e sont construites de manière à être continues sur V_e et elles satisfont des conditions de continuité entre les différents sous-domaines. Les sous-domaines V_e sont appelés des ELEMENTS connectés par des NOEUDS.

38

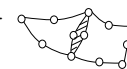
Discrétisation

Règles de partition du domaine en éléments

- ◆ Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des nœuds situés sur leur frontières, si elle existe.



- ◆ L'ensemble de tous les éléments doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné.
- ◆ Le recouvrement de deux éléments et les trous entre éléments sont inadmissibles.



39

Discrétisation

Erreur de discrétisation géométrique

- ◆ Lorsque la frontière du domaine est constituée par des courbes ou des surfaces plus complexes que celles qui définissent les frontières des éléments, une erreur est inévitable. Cette erreur est appelée "erreur de discrétisation géométrique". Elle peut être réduite
 - ◆ en diminuant la taille des éléments
 - ◆ en utilisant des éléments à frontières plus complexes.



40

Discrétisation

Formes d'éléments classiques

- ◆ 1D
 - ◆ linéaire ou quadratique : L2, L3
- ◆ 2D
 - ◆ éléments triangulaires: T3, T6
 - ◆ éléments quadrilatéraux: Q4, Q8
- ◆ 3D
 - ◆ éléments tétraédriques: TE4, TE10
 - ◆ éléments hexaédriques: H8, H20
 - ◆ éléments prismatiques: P6, P15

41

Formulation intégrale

Pour résoudre le système d'équations différentielles avec des conditions aux limites :

$$L(u) + f_v = 0 \quad \text{sur un domaine } V$$

$$C(u) = f_s \quad \text{sur la frontière } S \text{ de } V$$



la meilleure solution est la **solution analytique**.

Mais, en pratique, la méthode analytique est inapplicable pour des problèmes réels:

- ◆ domaine irrégulier
- ◆ multi-matériaux
- ◆ matériaux anisotropes
- ◆ équations non linéaires,

42

Méthodes numériques

- ◆ Trouver des solutions approchées aux points discrets.

Les méthodes numériques sont classées en 3 catégories :

- ◆ Méthode des différences finies
 - ◆ cette méthode marche plutôt pour des domaines rectangulaires
 - ◆ il est très difficile d'écrire un code général pour cette méthode
- ◆ Méthode variationnelle
- ◆ Méthode des résidus pondérés

Base mathématique de la MEF

Méthode variationnelle

43

Pour résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} D \frac{d^2 \phi}{dx^2} + Q = 0 & \text{sur } 0 < x < H \\ \phi_{(x=0)} = \phi_0; \quad \phi_{(x=H)} = \phi_H \end{cases}$$

la méthode variationnelle consiste à trouver une fonction test $\phi = \phi(x)$ telle que :

$$\Pi = \int_0^H \left(\frac{D}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + Q\phi \right) dx \rightarrow \min$$

Cette méthode est inapplicable dans les cas où l'équation différentielle contient des termes en dérivée première.

Méthode des résidus pondérés

44

- ◆ Supposons que $u = h(x)$ est une solution approchée de l'équation différentielle.

$$\text{résidu : } R(u) = L(u) + f_v \neq 0$$

- ◆ La méthode des résidus pondérés consiste à rechercher des fonctions u qui annulent la

forme intégrale globale :

$$W = \int \langle \psi \rangle \{ R(u) \} dV = \int \langle \psi \rangle \{ L(u) + f_v \} dV = 0$$



fonction de pondération (fonction test)
Le nombre de $\psi_i(x)$ est égal au nombre de paramètres inconnus

Forme intégrale faible

45

- ◆ L'intégration par parties de la forme intégrale globale fournit des formes intégrales dites faibles qui présentent les avantages suivants :

- ◆ L'ordre maximum des dérivées de u qui apparaissent dans la forme intégrale globale diminue. Les conditions de dérivabilité de u sont donc moins fortes.
- ◆ Certaines des conditions aux limites peuvent être prises en compte dans la forme intégrale faible.

Problème continu à deux dimensions

46

- ◆ Équation de Poisson : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_v = 0$ sur V

- ◆ Condition aux limites sur u (dite condition de Dirichlet) :

$$u = u_s \quad \text{sur } S_u$$

- ◆ Condition aux limites sur $\frac{\partial u}{\partial n}$: (condition de flux)

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = f_s \quad \text{sur } S_f$$

- ◆ si $\alpha = 0$, cette condition est dite de Neuman
- ◆ si $\alpha \neq 0$, cette condition est dite de Cauchy

Forme intégrale globale

47

$$W_g = \int \psi(x, y) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_v \right) dV = 0$$

- ◆ u est dérivable deux fois et doit satisfaire toutes les conditions aux limites sur S_u et S_f . Les fonctions $\psi(x, y)$ ne sont soumises à aucune condition.

Forme intégrale faible

48

$$W_f = - \int_V \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \psi f_v \right) dV + \int_{S_u} \psi \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{S_f} \psi \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

- ◆ Les fonctions $\psi(x, y)$ et $u(x, y)$ doivent être une fois dérivables. Les termes de contour peuvent être déterminés avec les conditions aux limites sur S_u et S_f .

$$\text{◆ sur } S_f : \quad \frac{\partial u}{\partial n} = f_s - \alpha u$$

- ◆ sur S_u , on peut imposer $\psi = 0$.

49

Forme intégrale faible

$$W_f = - \int_V \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \psi f_v \right) dV + \int_{S_f} \psi (f_s - \alpha u) dS$$

où u et ψ doivent satisfaire les conditions aux limites :

$$\psi = 0; \quad u = u_s \quad \text{sur } S_u$$

50

Choix de $\psi_i(x)$

Le choix du type de $\psi_i(x)$ conduit à différentes méthodes:

- méthode de collocation
- méthode de sous-domaines
- méthode des moindres carrés
- méthode de Galerkin

51

Méthode de collocation

◆ La fonction $\psi_i(x)$ est la distribution de Dirac $\delta(x_i)$ au point x_i , dit point de collocation. La forme intégrale s'écrit :

$$\int \delta(x_i) R(x, u) dV = R(x_i, u) = 0$$

Autrement dit, $R(x_i, u) = 0$ sur des points spécifiques. En pratique, cette méthode est peu utilisée car elle est difficile à mettre en oeuvre avec une approximation par éléments finis. De plus elle conduit à un système d'équations non symétrique. Par contre, elle a l'avantage d'éviter l'intégration sur le volume.

52

Méthode de sous-domaines

$\psi_i(x) = 1$ sur certaines zones.

Autrement dit,

$$\int R(u) dV = 0 \quad \text{sur des zones spécifiques.}$$

Cette méthode est peu utilisée car le choix des sous-domaines est difficile. De plus, elle nécessite des intégrations sur le volume.

53

Méthode des moindres carrés

$\psi_i(x) = R(x)$

Cette méthode consiste à minimiser l'expression

$$Er = \int R(x)^2 dV$$

par rapport aux paramètres $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Les conditions de stationnarité sont : $W = \delta Er = 0$

Cette relation est équivalente aux n équations algébriques :

$$W_i(a) = \int L(P_i) (L(<P>\{a\}) + f_v) dV = 0 \quad i=1,2,\dots,n$$

Cette méthode est peu utilisée car elle ne permet pas l'intégration par parties, et impose donc des conditions plus strictes sur l'approximation de u que la méthode de Galerkin. Par contre, elle conduit à un système symétrique et défini-positif quelle que soit l'équation différentielle.

54

Méthode de Galerkin

Les fonction $\psi(x)$ sont constituées par l'ensemble des variations δu des fonction u :

$$\psi = \delta u = <P> \{\delta a\} = <\delta a> \{P\} \quad \forall \{\delta a\}$$

$$W = \int \delta u (L(u) + f_v) dV = 0$$

$$W = <\delta a> \int \{P\} (L(<P>\{a\}) + f_v) dV = 0 \quad \forall \{\delta a\}$$

Comme W doit s'annuler pour tout $\{\delta a\}$, la relation précédente est équivalente aux n équations algébriques :

$$W_i(a) = \int P_i (L(<P>\{a\}) + f_v) dV = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Ce système est symétrique si L est auto-adjoint.

Exemple

Élément 1D

- ◆ Règles du maillage
 - ◆ la densité du maillage peut être variable en fonction de la variation des inconnues
 - ◆ placer un nœud où D, Q changent brutalement
 - ◆ placer un nœud à l'endroit où on veut connaître la solution

$$\begin{cases} D \frac{d^2 \phi}{dx^2} + Q = 0 & \text{sur } 0 < x < H \\ \phi(x=0) = \phi_0; \quad D \frac{d\phi}{dx}(x=H) = h(\phi_f - \phi_H) \end{cases}$$

Élément linéaire à 2 nœuds

- ◆ Interpolation linéaire

$$\phi(x) = a_1 + a_2 x$$
- ◆ Pour déterminer a_1 et a_2 , on peut établir 2 équations aux nœuds i et j :

$$\begin{cases} \phi_i = a_1 + a_2 x_i \\ \phi_j = a_1 + a_2 x_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{\phi_j x_i - \phi_i x_j}{L} \\ a_2 = \frac{\phi_j - \phi_i}{L} \end{cases}$$

Fonctions de forme
Fonctions d'interpolation

$$\phi(x) = \frac{x_j - x}{L} \phi_i + \frac{x - x_i}{L} \phi_j = N_i \phi_i + N_j \phi_j = \langle N_i \ N_j \rangle \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix}$$

soit $\phi = \langle N \rangle \{ \phi^e \}$

Propriétés de N

- ◆ $N_i(x_j) = \delta_{ij}$
- ◆ $\sum_{i=1}^n N_i = 1$
- ◆ $\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} = 0$
- ◆ N sont linéaires si l'interpolation est linéaire
N sont quadratiques si l'interpolation est quadratique

Passage du continu au discret

- ◆ EDP: $D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q = 0 \quad \text{sur } 0 < x < H$
 $u(x=0) = u_0 \text{ et } u(x=H) = u_H$
- ◆ Formulation Intégrale Globale (FIG)
- ◆ Formulation Intégrale Faible (FIF) avec la méthode de Galerkin
- ◆ Formulation Intégrale Faible élémentaire (FIFE)
- ◆ Approximation
- ◆ Intégration pour obtenir le système élémentaire
- ◆ Assemblage pour obtenir le système globale

$$[K] \{U\} = \{F\}$$

Élément 2D

Élément triangulaire à 3 nœuds i-j-k

- ◆ Interpolation linéaire

$$\phi(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y$$
- ◆ Équations aux nœuds i, j, k

$$\begin{cases} \phi_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i \\ \phi_j = a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j \\ \phi_k = a_1 + a_2 x_k + a_3 y_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = (a_i \phi_i + a_j \phi_j + a_k \phi_k) / 2A \\ a_2 = (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) / 2A \\ a_3 = (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) / 2A \end{cases}$$

A - aire du triangle

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j; & b_i &= y_j - y_k; & c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k; & b_j &= y_k - y_i; & c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i; & b_k &= y_i - y_j; & c_k &= x_j - x_i \end{aligned}$$

$$2A = \det \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix} = a_i + a_j + a_k$$

Approximation nodale $\phi(x) = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k = \langle N \rangle \{ \phi^e \}$

Fonctions de forme

$$\begin{aligned} N_i &= (a_i + b_i x + c_i y) / 2A = \frac{A_{jki}}{A} \\ N_j &= (a_j + b_j x + c_j y) / 2A = \frac{A_{kji}}{A} \\ N_k &= (a_k + b_k x + c_k y) / 2A = \frac{A_{ij k}}{A} \end{aligned}$$

- ◆ propriétés de N
 - ◆ N_i varie linéairement le long des côtés i-j et i-k
 - ◆ $N_i = 0$ sur le côté j-k

10

Remarque : les gradients sont constants dans un élément T3

$$\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \{ \phi^e \} = \frac{1}{2A} (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) \right.$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle \{ \phi^e \} = \frac{1}{2A} (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k) \right.$$

◆ C'est l'inconvénient de cet élément. Par contre, il est bien adapté pour des domaines irréguliers et la matrice élémentaire peut être calculée explicitement.

Élément 2D
Élément rectangulaire à 4 nœuds i-j-k-m

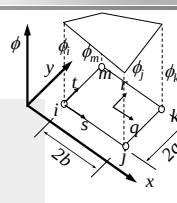
◆ Interpolation bi-linéaire dans «s-t»
 $\phi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 s + \alpha_3 t + \alpha_4 st$

◆ Équations aux nœuds i, j, k, m

$$\begin{aligned} \phi_i &= \alpha_1 \\ \phi_j &= \alpha_1 + 2b \alpha_2 \\ \phi_k &= \alpha_1 + 2b \alpha_2 + 2a \alpha_3 + 4ab \alpha_4 \\ \phi_m &= \alpha_1 + 2a \alpha_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= \phi_i \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2b} (\phi_j - \phi_i) \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2a} (\phi_m - \phi_i) \\ \alpha_4 &= \frac{1}{4ab} (\phi_i - \phi_j + \phi_k - \phi_m) \end{aligned}$$

$$\phi(x) = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k + N_m \phi_m = \langle N \rangle \{ \phi^e \}$$

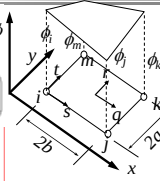
$$N_i = \left(1 - \frac{s}{2b}\right) \left(1 - \frac{t}{2a}\right); \quad N_j = \frac{s}{2b} \left(1 - \frac{t}{2a}\right)$$

$$N_k = \frac{st}{4ab}; \quad N_m = \frac{t}{2a} \left(1 - \frac{s}{2b}\right)$$


Transformation : "s-t" ==> "q-r"

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{q}{b}\right) \left(1 - \frac{r}{a}\right); & N_j &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{q}{b}\right) \left(1 - \frac{r}{a}\right) \\ N_k &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{q}{b}\right) \left(1 + \frac{r}{a}\right); & N_m &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{q}{b}\right) \left(1 + \frac{r}{a}\right) \\ N_i &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta); & N_j &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) \\ N_k &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta); & N_m &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) \end{aligned}$$

$s = b + q$
 $t = a + r$



Ces expressions sont très utiles puisqu'elles permettent de définir l'élément de référence pour des éléments plus généraux : éléments quadrilatéraux à 4 nœuds.

Remarque : les gradients ne sont pas constants dans un élément Q4

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial q} &= \frac{\partial N_i}{\partial q} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial q} \phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial q} \phi_k + \frac{\partial N_m}{\partial q} \phi_m \\ &= \frac{1}{4b} \left(1 - \frac{r}{a}\right) (\phi_j - \phi_i) + \frac{1}{4b} \left(1 + \frac{r}{a}\right) (\phi_k - \phi_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial r} &= \frac{\partial N_i}{\partial r} \phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial r} \phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial r} \phi_k + \frac{\partial N_m}{\partial r} \phi_m \\ &= \frac{1}{4a} \left(1 - \frac{q}{b}\right) (\phi_m - \phi_i) + \frac{1}{4a} \left(1 + \frac{q}{b}\right) (\phi_k - \phi_j) \end{aligned}$$

◆ Les propriétés de N sont comme celles de T3. Ces deux types d'élément sont donc compatibles et peuvent être utilisés conjointement.

Systèmes de coordonnées

◆ La résolution du problème par éléments finis demande souvent l'évaluation des intégrales dans un domaine et il est difficile et même impossible de le faire par des méthodes analytiques. On fait donc appel aux méthodes numériques.

◆ Les difficultés liées à l'évaluation numérique des intégrales peuvent être réduites par changement des variables d'intégration.

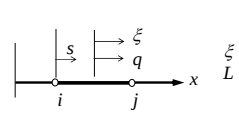
◆ Par exemple, écrire l'intégrale dans un nouveau système de coordonnées.

Systèmes de coordonnées

◆ système de coordonnées globales : x

◆ système de coordonnées locales : s, q

◆ système de coordonnées de référence: ξ : $|\xi| \leq 1$



$\xi = 2q/L$
 $L = x_j - x_i$

67

Différentes expressions de N

$x: x_i \leq x \leq x_j \quad N_i(x) = \frac{x_j - x}{L}; \quad N_j(x) = \frac{x - x_i}{L}$
 $s: x = x_i + s; \quad 0 \leq s \leq L; \quad N_i(s) = 1 - \frac{s}{L}; \quad N_j(s) = \frac{s}{L}$
 $q: x = x_i + \frac{L}{2} + q; \quad -\frac{L}{2} \leq q \leq \frac{L}{2}$
 $N_i(q) = \frac{1}{2} - \frac{q}{L}; \quad N_j(q) = \frac{1}{2} + \frac{q}{L}$
 $\xi: \xi = 2q/L; \quad -1 \leq \xi \leq 1; \quad N_i(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi); \quad N_j(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$

68

Formule intégrale d'Olmstead

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{p1}^{p2} f(g(p)) \frac{dg(p)}{dp} dp$$

- ♦ p - variable du nouveau système de coordonnées
- ♦ $g(p)$ - équation qui relie x et p : $x = g(p)$
- ♦ Exemple: évaluer l'intégrale de N

$$\int_{x_i}^{x_j} (N_i(x))^2 dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (N_i(q))^2 dq$$

$$= \int_{-1}^1 (N_i(\xi))^2 \frac{L}{2} d\xi = \frac{L}{8} \int_{-1}^1 (1 - \xi)^2 d\xi = \frac{L}{3}$$

69

Rapport des longueurs Élément L2

$v_1 = (1-s/L) = N_i(s)$
 $v_2 = s/L = N_j(s)$

$$\int_0^L (N_i(s))^a (N_j(s))^b ds = \int_0^1 v_1^a v_2^b L dv_2 = L \int_0^1 (1-v_2)^a v_2^b dv_2$$

- ♦ formule intégrale d'Abramovitz-Stegun

$$\int_0^1 (1-t)^{a-1} t^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}; \quad \Gamma(n+1) = n!$$

- ♦ Ex. $\int_0^L (N_i(s))^3 (N_j(s))^2 ds = L \int_0^1 v_1^3 v_2^2 dv_2 = L \frac{3! 2!}{(3+2+1)!} = \frac{L}{60}$

70

Rapport des longueurs Élément T3

$L_1 = d/h = A_{pjk}/A = N_i$
 $L_2 = N_j$
 $L_3 = N_k$

- ♦ formule intégrale d'Eisenberg-Malvern

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = 2A \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!}$$

- ♦ Ex. $\int_A N_i N_j dx dy = \int_A L_1^1 L_2^1 L_3^0 dA = 2A \frac{1! 1! 0!}{(1+1+0+2)!} = \frac{A}{12}$

71

Intégration sur les contours

- ♦ L'incorporation des conditions aux limites avec dérivations ou des forces surfaciques dans le modèle d'éléments finis fait intervenir l'intégration sur les côtés des éléments.
- ♦ Toute intégration sur le côté d'un élément triangulaire peut être remplacée par l'intégration sur une ligne en terme de s ou v_2 :

$$\int_{\Gamma} f(L_1, L_2, L_3) d\Gamma = \int_0^L g(s) ds = L \int_0^1 h(v_2) dv_2$$

et l'intégration se fait avec la formule factorielle.

72

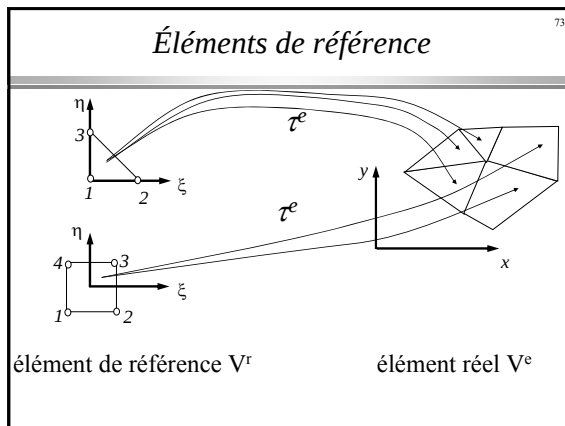
Intégration sur les contours

Côté i-j: $L_1 = A_{pjk}/A = (b-s)/b = v_1$
 $L_2 = v_2$
 Côté j-k: $L_2 = v_1$ $L_3 = v_2$
 Côté k-i: $L_3 = v_1$ $L_1 = v_2$

$$\int_{\Gamma} \{N\} f d\Gamma = L_{ik} f \int_0^1 \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dv_2 = L_{ik} f \int_0^1 \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} dv_2$$

- ♦ Côté k-i:

$$= L_{ik} f \int_0^1 \begin{Bmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_2 \end{Bmatrix} dv_2 = \frac{L_{ik} f}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



Éléments de référence: définition

- ◆ Un élément de référence V^r est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence ($|\xi| \leq 1$), qui peut être transformé en chaque élément réel V^e par une transformation géométrique τ^e :
 $\tau^e : \xi \rightarrow x^e = x^e(\xi) \quad \xi = \langle \xi, \eta \rangle ; \quad x = \langle x, y \rangle$
- ◆ Nous utilisons une transformation linéaire par rapport aux coordonnées $\{x_n\}$ des nœuds géométriques de l'élément réel:
 $\tau : \xi \rightarrow x(\xi) = [N(\xi)] \{x_n\}$
 N_i - fonctions de transformation géométrique

Propriétés de τ^e

1. τ est bijective : tout point de $V^r \Leftrightarrow$ un point de V^e
2. nœuds de $V^r \Leftrightarrow$ nœuds de V^e
3. chaque frontière de V^r se transforme en la frontière correspondante de V^e

- ◆ **Élément isoparamétrique : $N(\xi) = \underline{N}(\xi)$**

Construction des fonctions $N(\xi)$

- ◆ Approximation généralisée
 $u(\xi) = \langle P_1(\xi) P_2(\xi) \dots P_{nd}(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle \{a\}$
- ◆ Approximation nodale
 $u(\xi) = \langle N_1(\xi) N_2(\xi) \dots N_{nd}(\xi) \rangle = \langle N(\xi) \rangle \{u^e\}$

En chaque nœud d'interpolation de coordonnées $\{\xi_i\}$, la fonction $u(\xi)$ prend la valeur nodale u_i :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{nd} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \langle P_1(\xi_1) P_2(\xi_1) \dots P_{nd}(\xi_1) \rangle \\ \vdots \\ \langle P_1(\xi_{nd}) P_2(\xi_{nd}) \dots P_{nd}(\xi_{nd}) \rangle \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{nd} \end{Bmatrix} ; \quad \{u^e\} = [P_n] \{a\}$$

Construction des fonctions $N(\xi)$

- ◆ Reportons $\{a\} = [P_n]^{-1} \{u^e\}$ dans $u(\xi) = \langle P(\xi) \rangle \{a\}$, on a :
 $u(\xi) = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1} \{u^e\}$
- ◆ Par identification, on obtient finalement :
 $\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1}$
- ◆ Résumé des opérations de construction de N
 - ◆ choix de la base polynomiale $\langle P(\xi) \rangle$
 - ◆ évaluation de la matrice nodale $[P_n] = [P_j(\xi_i)]$
 - ◆ inversion de $[P_n]$
 - ◆ $\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1}$

Triangle de Pascal

- ◆ En pratique, on peut choisir la base polynomiale à l'aide du triangle de Pascal (dans les cas 1D et 2D)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & \xi & \eta & & \\ & & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 & & \\ & \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

- ◆ T6: $\langle P(\xi) \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \quad \xi^2 \quad \eta^2 \rangle$
- ◆ Q8: $\langle P(\xi) \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \quad \xi^2 \quad \eta^2 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \rangle$

79

Quelques éléments de références

◆ 1D

- L2 $\langle N \rangle = \langle \frac{1-\xi}{2} \quad \frac{1+\xi}{2} \rangle$
- L3 $\langle N \rangle = \langle \frac{\xi^2-\xi}{2} \quad 1-\xi^2 \quad \frac{\xi^2+\xi}{2} \rangle$

◆ 2D

- T3 $\langle N \rangle = \langle 1-\xi-\eta \quad \xi \quad \eta \rangle$
- T6 $\langle N \rangle = \langle -\lambda(1-2\lambda) \quad 4\xi\lambda \quad -\xi(1-2\xi) \quad 4\xi\eta \quad -\eta(1-2\eta) \quad 4\eta\lambda \rangle$

avec $\lambda = 1-\xi-\eta$

80

Éléments de référence 2D

Q4 : $\langle N \rangle = 0.25 \langle (1-\xi)(1-\eta) \quad (1+\xi)(1-\eta) \quad (1+\xi)(1+\eta) \quad (1-\xi)(1+\eta) \rangle$

Q8 : $N_1 = -0.25 (1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$
 $N_2 = 0.5 (1-\xi^2)(1-\eta)$
 $N_3 = -0.25 (1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$
 $N_4 = 0.5 (1+\xi)(1-\eta^2)$
 $N_5 = -0.25 (1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)$
 $N_6 = 0.5 (1-\xi^2)(1+\eta)$
 $N_7 = -0.25 (1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)$
 $N_8 = 0.5 (1-\xi)(1-\eta^2)$

81

Éléments de référence 3D

◆ TE4: $\langle N \rangle = \langle 1-\xi-\eta-\zeta \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \rangle$

◆ H8 :

$\langle N \rangle = 0.125 \langle a_2 b_2 c_2 \quad a_1 b_2 c_2 \quad a_1 b_1 c_2 \quad a_2 b_1 c_2 \quad a_2 b_2 c_1 \quad a_1 b_2 c_1 \quad a_1 b_1 c_1 \quad a_2 b_1 c_1 \rangle$

$a_1 = 1+\xi; a_2 = 1-\xi;$
 $b_1 = 1+\eta; b_2 = 1-\eta; c_1 = 1+\zeta; c_2 = 1-\zeta$

82

Transformation des opérateurs de dérivation

◆ $\{\partial_\xi\} = [J] \{\partial_x\}$

Matrice Jacobienne

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

◆ $\{\partial_x\} = [j] \{\partial_\xi\}$

◆ $[j] = [J]^{-1}$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}$$

83

Calcul des termes de la matrice Jacobienne [J]

Comme $\langle x \ y \ z \rangle = \langle N(\xi, \eta, \zeta) \rangle [\{x_n\} \ \{y_n\} \ \{z_n\}]$

on a :

$$[J] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \langle x \ y \ z \rangle = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle \\ \langle N_{,\zeta} \rangle \end{bmatrix} [\{x_n\} \ \{y_n\} \ \{z_n\}]$$

84

Transformation d'une intégrale

Formule intégrale d'Olmstead

1D $\int_a^b f(x) \, dx = \int_{p_1}^{p_2} f(g(p)) \left(\frac{dg(p)}{dp} \right) dp$

3D $\int_{v^f} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{v^r} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \det(J) \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$

85

Intégration numérique

◆ Évaluer l'intégrale dans un élément de référence 1D

$$\text{Aire} = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^g w_i f(\xi_i)$$

g : nombre de points d'intégration
 ξ_i : coordonnées de points d'intégration
 w_i : poids d'intégration

86

Méthode de Gauss

◆ Les g coefficients (poids) w_i et les abscisses ξ_i sont déterminés de manière à intégrer exactement des polynômes d'ordre $m \leq 2g - 1$:

$$f(\xi) = a_1 + a_2 \xi + \dots + a_{2g} \xi^{2g-1}$$

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = a_1 \int_{-1}^1 d\xi + a_2 \int_{-1}^1 \xi d\xi + \dots + a_{2g} \int_{-1}^1 \xi^{2g-1} d\xi$$

$$= a_1(w_1 + w_2 + \dots + w_g)$$

$$+ a_2(w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 + \dots + w_g \xi_g) + \dots$$

$$+ a_{2g}(w_1 \xi_1^{2g-1} + w_2 \xi_2^{2g-1} + \dots + w_g \xi_g^{2g-1})$$

87

Méthode de Gauss détermination de w_i et ξ_i

◆ Pour que l'équation précédente soit identiquement vérifiée pour tout $a_1, a_2, \dots, a_{2g}$, il faut :

$$\int_{-1}^1 \xi^\alpha d\xi = \frac{2}{\alpha+1} = \sum_{i=1}^g w_i \xi_i^\alpha \quad \alpha = 0, 2, \dots, 2g-2$$

$$\int_{-1}^1 \xi^\alpha d\xi = 0 = \sum_{i=1}^g w_i \xi_i^\alpha \quad \alpha = 1, 3, \dots, 2g-1$$

$$2 = w_1 + w_2 + \dots + w_g$$

$$0 = w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 + \dots + w_g \xi_g$$

soit

$$\frac{2}{3} = w_1 \xi_1^2 + w_2 \xi_2^2 + \dots + w_g \xi_g^2$$

$$\dots$$

$$0 = w_1 \xi_1^{2g-1} + w_2 \xi_2^{2g-1} + \dots + w_g \xi_g^{2g-1}$$

Conditions:
 $w_i > 0$
 $-1 < \xi_i < 1$
 $i = 1, 2, \dots, g$

Exemple

88

2D ou 3D

◆ En 2D et 3D, utiliser dans chaque direction une intégration numérique à une dimension.

◆ Élément de référence carré (2D)

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g w_i w_j f(\xi_i, \eta_j)$$

89

Élément de référence triangulaire

◆ Formule de Hammer

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} f(\xi, \eta) d\eta d\xi = \sum_{i=1}^g w_i f(\xi_i, \eta_i)$$

◆ Ces formules intègrent exactement des polynômes d'ordre m ($\xi^i \eta^j$ avec $i+j \leq m$).

90

Élément de référence triangulaire

m	1	2	2	3
g	1	3	3	4
ξ_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}$
η_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$	$\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}$
w_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{27}{96}, \frac{25}{96}$

91

Problèmes scalaires 2D

- ◆ Équation fondamentale

$$D_x \frac{d^2\phi}{dx^2} + D_y \frac{d^2\phi}{dy^2} - G\phi + Q = 0$$
- ◆ Cette équation peut être appliquée aux différents problèmes physiques :
- ◆ Torsion d'une section non circulaire

$$\frac{1}{g} \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{1}{g} \frac{d^2\phi}{dy^2} + 2\theta = 0; \quad D_x = D_y = \frac{1}{g}; \quad G=0; \quad Q=2\theta$$

g - module de cisaillement du matériau
 θ - angle de torsion
 φ - fonction des contraintes

92

Problèmes physiques

- ◆ Écoulement irrotationnel

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} = 0; \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} = 0; \quad D_x=D_y=1; \quad G=Q=0$$
- ◆ ψ - lignes de courant
- ◆ φ - lignes de potentiel (perpendiculaires aux ψ)
- ◆ Les vitesses d'écoulement sont liées aux $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}$
- ◆ Écoulement d'eau dans un milieu poreux

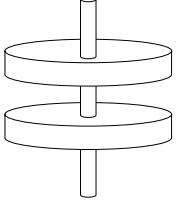
$$D_x \frac{d^2\phi}{dx^2} + D_y \frac{d^2\phi}{dy^2} + Q = 0$$
- ◆ D_x, D_y - perméabilités
- ◆ Q - source en un point (pompe)
- ◆ φ - niveau d'eau

93

Problèmes physiques

- ◆ Transfert de chaleur d'une plaque de refroidissement

$$D_x \frac{d^2\phi}{dx^2} + D_y \frac{d^2\phi}{dy^2} + Q - \frac{2h}{t} (\phi - \phi_f) = 0$$
- ◆ D_x, D_y - conductivités
- ◆ h - coefficient de convection
- ◆ t - épaisseur de la plaque
- ◆ Q - source de chaleur interne
- ◆ φ - température
- ◆ φ_f - température ambiante



94

Équations intégrales

- ◆ Contribution d'un élément au système d'équations :

$$\{R^e\} = - \int_A \{N\} (D_x \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - G\phi + Q) dA$$
- ◆ avec $\phi = \langle N \rangle \{ \phi^e \}$

$$- \int_A \{N\} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} dA = \int_A \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \frac{\partial\phi}{\partial x} dA - \int_{\Gamma} \{N\} \frac{\partial\phi}{\partial x} \cos\theta d\Gamma$$

$$- \int_A \{N\} \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} dA = \int_A \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \frac{\partial\phi}{\partial y} dA - \int_{\Gamma} \{N\} \frac{\partial\phi}{\partial y} \sin\theta d\Gamma$$

95

Système élémentaire

$$\{R^e\} = \{I^e\} + [K_{DG}^e] \{ \phi^e \} - \{f_Q^e\}$$

$$\{I^e\} = - \int_{\Gamma} \{N\} (D_x \frac{\partial\phi}{\partial x} \cos\theta + D_y \frac{\partial\phi}{\partial y} \sin\theta) d\Gamma$$

$$[K_{\phi\phi}^e] = \int_A \left(D_x \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle + D_y \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle \right) dA + \int_A G \{N\} \{N\} dA$$

$$\{f_Q^e\} = \int_A Q \{N\} dA$$

96

Vecteur gradient et [K^e] compacte

- ◆ La matrice [K_{DG}^e] peut être réécrite sous une forme plus compacte par la définition de :

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_y \end{bmatrix}$$
- et du vecteur gradient

$$\{grad\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle \end{bmatrix} \{ \phi^e \} = [B] \{ \phi^e \}$$

$$[K_{\phi\phi}^e] = \int_A [B]^T [D] [B] dA + \int_A G \{N\} \{N\} dA = [K_D^e] + [K_G^e]$$

97

Application: élément triangulaire

Matrices

$$[K_D^e] = \int_A [B]^T [D] [B] dA = [B]^T [D] [B] A$$

$$= \frac{D_x}{4A} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_1 b_2 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ b_1 b_3 & b_2 b_3 & b_3^2 \end{bmatrix} + \frac{D_y}{4A} \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_1 c_2 & c_2^2 & c_2 c_3 \\ c_1 c_3 & c_2 c_3 & c_3^2 \end{bmatrix}$$

Vecteur

$$[K_G^e] = \int_A G \{N\} \{N\}^T dA = G \int_A \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 & N_1 N_3 \\ N_1 N_2 & N_2^2 & N_2 N_3 \\ N_1 N_3 & N_2 N_3 & N_3^2 \end{bmatrix} dA$$

$$= G \int_A \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 & L_1 L_3 \\ L_1 L_2 & L_2^2 & L_2 L_3 \\ L_1 L_3 & L_2 L_3 & L_3^2 \end{bmatrix} dA = \frac{GA}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\{f^e\} = \int_A Q \{N\} dA = \frac{QA}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

98

Application : élément rectangulaire

◆ Comme le système de coordonnées "s-t" est parallèle au système de coordonnées "x-y" et une longueur reste la même dans les deux systèmes de coordonnées, on a :

$$\int_A f(x,y) dx dy = \int_A f(s,t) ds dt$$

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x} = \frac{\partial N_\beta}{\partial s} ; \quad \frac{\partial N_\beta}{\partial y} = \frac{\partial N_\beta}{\partial t} ; \quad \beta = i, j, k, m$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial s} \\ \frac{\partial N}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial t}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$N_i = \left(1 - \frac{s}{2b}\right) \left(1 - \frac{t}{2a}\right) ; \quad N_j = \frac{s}{2b} \left(1 - \frac{t}{2a}\right)$$

$$N_k = \frac{st}{4ab} ; \quad N_m = \frac{t}{2a} \left(1 - \frac{s}{2b}\right)$$

$$[B] = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} -(2a-t) & (2a-t) & t & -t \\ -(2b-s) & -s & s & (2b-s) \end{bmatrix}$$

99

élément rectangulaire : $[K_D^e]$

$$[K_D^e] = \int_A [B]^T [D] [B] dA = \int_0^{2b} \int_0^{2a} [B]^T [D] [B] dt ds$$

◆ L'intégration sur le terme de la première ligne et de la première colonne de $[B]^T [D] [B]$ donne :

$$\int_0^{2b} \int_0^{2a} \left(\frac{D_x}{16a^2b^2} (2a-t)^2 + \frac{D_y}{16a^2b^2} (2b-s)^2 \right) dt ds = \frac{D_x a}{3b} + \frac{D_y b}{3a} \dots$$

$$[K_D^e] = \frac{D_x a}{6b} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{D_y b}{6a} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

100

élément rectangulaire : $[K_G^e]$ et $\{f^e\}$

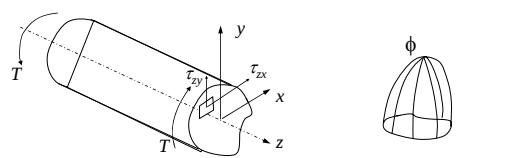
$$[K_G^e] = \int_A G \{N\} \{N\}^T dA = G \int_A \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_m \\ N_1 N_2 & N_2^2 & N_2 N_3 & N_2 N_m \\ N_1 N_3 & N_2 N_3 & N_3^2 & N_3 N_m \\ N_1 N_m & N_2 N_m & N_3 N_m & N_m^2 \end{bmatrix} dA$$

$$\int_A N_k^2 dA = \int_0^{2b} \int_0^{2a} \left(\frac{st}{4ab} \right)^2 dt ds = \frac{4ab}{9} = \frac{A}{9} \dots$$

$$[K_G^e] = \frac{GA}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} ; \quad \{f^e\} = \int_A Q \{N\} dA = \frac{QA}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

101

Torsion d'une section non-circulaire



$$\frac{1}{g} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{1}{g} \frac{d^2 \phi}{dy^2} + 2\theta = 0 ; \quad \phi = 0 \text{ sur les contours}$$

- contraintes de cisaillement : $\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} ; \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$
- couple : $T = 2 \int_A \phi dA = 2 \sum_{e=1}^{nelt} \int_{A^e} \phi^e dA$

102

Conditions aux limites sur la dérivée

Il existe deux types de conditions aux limites :

sur Γ_1 : $\phi = \bar{\phi}$

sur Γ_2 : $D_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \theta + D_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \theta = -M\phi + S$

si $D_x = D_y = D$, $D \frac{\partial \phi}{\partial n} = -M\phi + S$

Sur les frontières isolées ou imperméables ou sur l'axe de symétrie, on a :

$$D_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \theta + D_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \theta = 0 \Rightarrow M = S = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ si } D_x = D_y$$

Conditions aux limites sur la dérivée

103

Les conditions aux limites portant sur la dérivée sont incluses dans le modèle d'éléments finis par

$$\begin{aligned}\{I^e\} &= -\int_{\Gamma} \{N\} \left(D_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \theta + D_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \theta \right) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \{N\} (M \phi - S) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} M \{N\} \langle N \rangle d\Gamma \{ \phi^e \} - \int_{\Gamma} S \{N\} d\Gamma \\ &= [K_M^e] \{ \phi^e \} - \{ f_s^e \}\end{aligned}$$

Système élémentaire complet

104

$$[K^e] \{ \phi^e \} = \{ f^e \}$$

avec

$$\begin{aligned}[K^e] &= [K_D^e] + [K_G^e] + [K_M^e] \\ \{ f^e \} &= \{ f_Q^e \} + \{ f_{Q^*}^e \} + \{ f_s^e \}\end{aligned}$$

$[K_D^e]$	Matrice de conductivité	$\{ f_Q^e \}$	Vecteur de source répartie
$[K_G^e]$	Matrice de génération de chaleur	$\{ f_{Q^*}^e \}$	Vecteur de source concentrée
$[K_M^e]$	Matrice de convection	$\{ f_s^e \}$	Vecteur de convection

Application : Élément Q4

105

$$[K_M^e] = M \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k & N_i N_m \\ N_j N_i & N_j^2 & N_j N_k & N_j N_m \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k^2 & N_k N_m \\ N_m N_i & N_m N_j & N_m N_k & N_m^2 \end{bmatrix} d\Gamma \quad \{ f_s^e \} = S \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \\ N_m \end{bmatrix} d\Gamma$$

Sur le côté i-j: $N_k = N_m = 0$

$$\int_{\Gamma_{ij}} N_i d\Gamma = \int_{\Gamma_{ij}} N_j d\Gamma = \frac{L_{ij}}{2}; \quad \int_{\Gamma_{ij}} N_i^2 d\Gamma = \int_{\Gamma_{ij}} N_j^2 d\Gamma = \frac{L_{ij}}{3}; \quad \int_{\Gamma_{ij}} N_i N_j d\Gamma = \frac{L_{ij}}{6}$$

$$\Rightarrow [K_M^e] = \frac{ML_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{ f_s^e \} = \frac{SL_{ij}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Application : Élément T3

106

$$[K_M^e] = M \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j^2 & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k^2 \end{bmatrix} d\Gamma \quad \{ f_s^e \} = S \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} d\Gamma$$

Sur le côté i-j: $N_k = 0$

$$\int_{\Gamma_{ij}} N_i d\Gamma = \int_{\Gamma_{ij}} N_j d\Gamma = \frac{L_{ij}}{2}; \quad \int_{\Gamma_{ij}} N_i^2 d\Gamma = \int_{\Gamma_{ij}} N_j^2 d\Gamma = \frac{L_{ij}}{3}; \quad \int_{\Gamma_{ij}} N_i N_j d\Gamma = \frac{L_{ij}}{6}$$

$$\Rightarrow [K_M^e] = \frac{ML_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{ f_s^e \} = \frac{SL_{ij}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Convection : identification de M, S

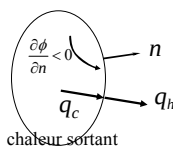
107

◆ Flux de chaleur sortant

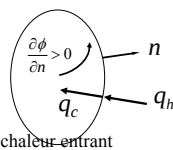
$$q_c = -kA \frac{\partial \phi}{\partial n} = q_n = hA(\phi - \phi_f) \Rightarrow M = h; \quad S = h\phi_f$$

◆ Flux de chaleur entrant

$$q_c = kA \frac{\partial \phi}{\partial n} = q_n = hA(\phi_f - \phi) \Rightarrow M = h; \quad S = h\phi_f$$



chaleur sortant



chaleur entrant

Application : transfert de chaleur par conduction et convection

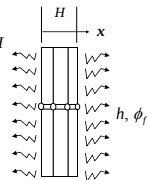
108

1D : mur composite

• Équation différentielle : $kA \frac{d^2 \phi}{dx^2} + QA = 0$ sur $0 < x < H$

• Convection

$$\begin{aligned}kA \frac{d\phi}{dx} &= hA(\phi - \phi_f) \quad \text{à } x=0 \\ -kA \frac{d\phi}{dx} &= hA(\phi - \phi_f) \quad \text{à } x=H\end{aligned}$$



• Matrice élémentaire $[K^e] = \frac{kA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} hA & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & hA \end{bmatrix}$

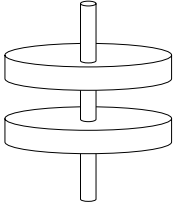
• Vecteur sollicitation $\{ f^e \} = \frac{QAL}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + hA\phi_f \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + hA\phi_f \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

**Application : transfert de chaleur
par conduction et convection** 109

◆ 2D : plaque de refroidissement

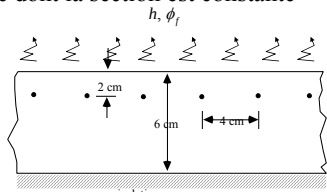
$$D_x \frac{d^2\phi}{dx^2} + D_y \frac{d^2\phi}{dy^2} + Q - \frac{2h}{t} (\phi - \phi_f) = 0$$

- ◆ D_x, D_y - conductivités
- ◆ h - coefficient de convection
- ◆ t - épaisseur de la plaque
- ◆ Q - source de chaleur interne
- ◆ ϕ - température
- ◆ ϕ_f - température ambiante



**Application : transfert de chaleur
par conduction et convection** 110

◆ 2D : chauffage de sols : des fils chauffants entourés par un volume dont la section est constante



$$k \frac{d^2\phi}{dx^2} + k \frac{d^2\phi}{dy^2} + Q^* = 0 \quad \text{sur } A$$

$$k \frac{\partial \phi}{\partial n} = h(\phi - \phi_f) \quad \text{sur } \Gamma_{\text{convection}} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\text{isolation et } \Gamma_{\text{sym}}^{\text{fig}}}$$

**Mécanique des fluides
(écoulement irrotationnel)** 111

◆ Domaines d'application

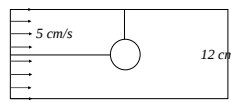
- ◆ écoulement autour des coins, des obstacles...
- ◆ écoulement des eaux sous-terrains, écoulement sous un barrage...
- ◆ aéronautique

◆ Hypothèses

- ◆ pas de frottement entre les fluides et les surfaces
- ◆ pas de turbulence (sans rotation, ni distorsion des particules des fluides)
- ◆ pas de pénétration ni séparation des surfaces

Formulation "lignes de courant ϕ " 112

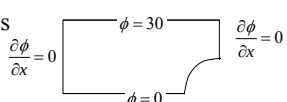
◆ EDP $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$



◆ Vitesse d'écoulement

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

◆ Conditions aux limites

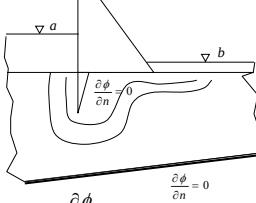


**Écoulement de l'eau
dans un milieu poreux** 113

◆ EDP $D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + Q = 0$

ϕ : niveau piézo-métrique
 D_x, D_y : perméabilités
 Q : source en un point (pompe)

◆ Vitesse d'écoulement (lois de Darcy)

$$v_x = -D_x \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v_y = -D_y \frac{\partial \phi}{\partial y}$$


Application : écoulement visqueux 114

Équations de Navier-Stokes (2D)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f_x = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f_y = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

u, v : vitesse
 p : pression
 μ : viscosité
 ρ : densité
 f_x, f_y : forces

