

DESS – CS41

Codes de calcul

Zhi-Qiang FENG

IUP

Université d'Evry - Val d'Essonne



Objectifs

- Approfondir des connaissances en modélisation numérique
- Réaliser et utiliser des codes de calcul des structures par la **Méthode des Eléments Finis (MEF)**



Thèmes abordés

- Rappel des principes de la méthode des éléments finis
- Résolution d'un problème : cas général
- Organisation générale d'un code de calcul par EF
- Classification des problèmes d'analyse des structures
- Méthodologie de la modélisation numérique
- Réalisation d'un code d'éléments finis en FORTRAN/C++
- Résolution des problèmes importants du point de vue industriel avec le code ANSYS
- Liaison avec la CAO

Des études de cas pratiques seront traitées en relation avec les deux autres UV - DESS (MNL41 : Mécanique non linéaire, DS41 : Dynamique des structures)



Admissibilité de UV

$$(1/2 \text{ examen} + 1/2 \text{ TP}) \geq 10/20$$

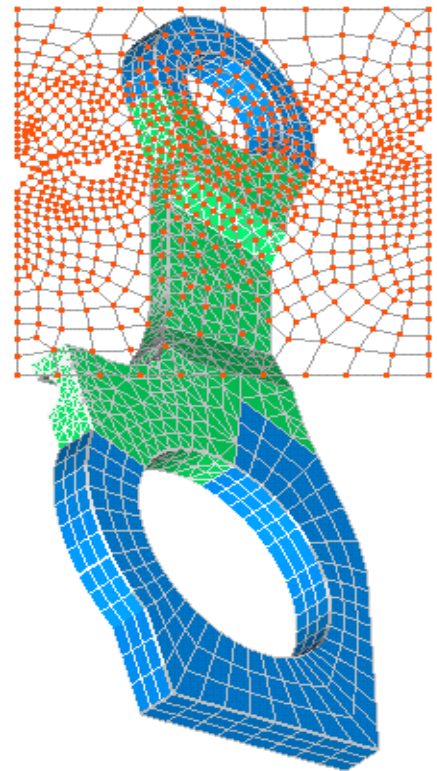
Rappel des principes de la MEF

La MEF est basée sur une idée simple : subdiviser (**discrétiser**) une forme complexe en un grand nombre de sous-domaines élémentaires de forme géométrique simple (**éléments finis**) interconnectés en des points appelés **nœuds**.

Nous considérons le comportement mécanique de chaque élément séparément, puis nous **assemblons** ces éléments de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

La MEF utilise des **approximations** simples des variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

Les nœuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière, mais sont basés sur des considérations de **précision de l'approximation**.



Equation fondamentale de la MEF

La MEF est basée sur la méthode matricielle des déplacements en mécanique des solides et des structures. L'équation fondamentale est :

$$[K] \{U\} = \{F\}$$

- [K]** - matrice de rigidité caractérisant le système (n×n)
- {U}** - vecteur des DDL – Degrés De Libertés (n), inconnus ; par exemple, les déplacements et les rotations des nœuds en mécanique des solides et des structures
- {F}** - vecteur des sollicitations appliquées (n), connues

SIGNIFICATION (1D)

	K	U	F
Ressort	raideur k	déplacement	force
Barre T/C	rigidité $\frac{EA}{L}$	déplacement	force
Thermique	conductivité $\frac{\alpha A}{L}$	température	flux de chaleur
Electricité	résistivité 1/R	potentiel	intensité
Ecoulement	perméabilité $\frac{\alpha A}{L}$	charge hydraulique	débit

Etapes logiques du calcul par éléments finis

1. Définir les nœuds et les éléments (Créer le maillage)
2. Pour chaque élément, établir la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$ reliant les degrés de libertés (déplacements) nodaux $\{u^e\}$ et les forces $\{f^e\}$ appliquées aux nœuds : $[K^e] \{u^e\} = \{f^e\}$
3. Assembler les matrices et les vecteurs élémentaires en un système global $[K] \{U\} = \{F\}$ de manière à satisfaire les conditions d'équilibre aux nœuds
4. Modifier le système global en tenant compte des conditions aux limites
5. Résoudre le système $[K] \{U\} = \{F\}$ et obtenir les déplacements $\{U\}$ aux nœuds
6. Calculer les gradients (déformations et contraintes) dans les éléments et les réactions aux nœuds sur lesquels les conditions aux limites sont imposées.

Etapes pratiques du calcul par EF

Pré-processeur

- ◆ Choisir le type d'éléments
- ◆ Entrer les propriétés géométriques
- ◆ Entrer les paramètres physiques
- ◆ Créer le modèle géométrique
- ◆ Créer le maillage : définir les nœuds et les éléments
- ◆ Appliquer les sollicitations
- ◆ Imposer les conditions aux limites

Calcul

- ◆ Choisir le type d'analyse (statique, dynamique,...)
- ◆ Construire la matrice et le vecteur élémentaire $[K^e]$, $\{f^e\}$
- ◆ Assembler $[K^e]$ et $\{f^e\}$ dans $[K]$ et $\{F\}$
- ◆ Prendre en compte les conditions aux limites
- ◆ Résoudre le système d'équations $[K] \{U\} = \{F\}$
- ◆ Calculer les variations additionnelles (σ , ϵ ...)

Post-processeur

- ◆ Présenter les résultats de façon intelligible et synthétique : sous forme numérique et sous forme graphique
- ◆ Effectuer des fonctions complémentaires : combinaisons, interprétations, interpolations, animation, ...

1. Elasticité tridimensionnelle isotrope en coordonnées cartésiennes

- Equations d'équilibre sur V :

$$\begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + f_{vx} = \rho \ddot{u} \\ \sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} + f_{vy} = \rho \ddot{v} \\ \sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y} + \sigma_{zz,z} + f_{vz} = \rho \ddot{w} \end{cases}$$

- Conditions aux limites

type "déplacement" sur S_u : $u = \bar{u}$; $v = \bar{v}$; $w = \bar{w}$

type "contrainte" sur S_f :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z = f_{sx} \\ \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z = f_{sy} \\ \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z = f_{sz} \end{cases}$$

- Relations déformations – déplacements linéaires :

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x}; \varepsilon_{yy} = v_{,y}; \varepsilon_{zz} = w_{,z}; \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}; \gamma_{yz} = w_{,y} + v_{,z}; \gamma_{zx} = u_{,z} + w_{,x}$$

- Relations contraintes – déformations (élasticité linéaire isotrope) :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{th}\}; \quad \{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} + \{\varepsilon_{th}\}; \quad \langle \varepsilon_{th} \rangle = \alpha \Delta T \langle 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx} \rangle; \quad \langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \rangle;$$

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}; \quad [C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \text{ avec } b = \frac{\nu}{1-\nu}; c = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}; d = 2(1+\nu)$$

2. Elasticité axisymétrique isotrope

- Equations d'équilibre sur V avec $\sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = 0$:
$$\begin{cases} \sigma_{rr,r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \sigma_{rz,z} + f_{vr} = \rho \ddot{u} \\ \sigma_{rz,r} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \sigma_{zz,z} + f_{vz} = \rho \ddot{w} \end{cases}$$

- Conditions aux limites :

type "déplacement" sur S_u : $u = \bar{u}$; $w = \bar{w}$

type “contrainte” sur S_f :
$$\begin{cases} \sigma_{rr} n_r + \sigma_{rz} n_z = f_{sr} \\ \sigma_{rz} n_r + \sigma_{zz} n_z = f_{sz} \end{cases}$$

- Relations déformations – déplacements linéaires : $\varepsilon_{rr} = u_{,r}$; $\varepsilon_{\theta\theta} = u/r$; $\varepsilon_{zz} = w_{,z}$; $\gamma_{rz} = u_{,z} + w_{,r}$
- Relations contraintes – déformations (élasticité linéaire isotrope) :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{rr} \quad \sigma_{\theta\theta} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{rz} \rangle ; \quad \langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_{rr} \quad \varepsilon_{\theta\theta} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{rz} \rangle ;$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{th}\} ; \quad \{\varepsilon\} = [C] \{\sigma\} + \{\varepsilon_{th}\} ; \quad \langle \varepsilon_{th} \rangle = \alpha \Delta T \langle 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \rangle$$

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} ; \quad [C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

3. Elasticité bidimensionnelle isotrope en coordonnées cartésiennes

- Equations d'équilibre sur V :
$$\begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + f_{vx} = \rho \ddot{u} \\ \sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + f_{vy} = \rho \ddot{v} \end{cases}$$

- Conditions aux limites :

type “déplacement” sur S_u : $u = \bar{u}$; $v = \bar{v}$;

type “contrainte” sur S_f :
$$\begin{cases} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y = f_{sx} \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y = f_{sy} \end{cases}$$

- Relations déformations – déplacements linéaires : $\varepsilon_{xx} = u_{,x}$; $\varepsilon_{yy} = v_{,y}$; $\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}$
- Relations contraintes – déformations (élasticité linéaire isotrope) :

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{th}\} ; \quad \{\varepsilon\} = [C] \{\sigma\} + \{\varepsilon_{th}\}$$

Déformation plane : $w=0$; $u=u(x,y)$; $v=v(x,y)$ $\Rightarrow \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy} \rangle ; \quad \sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - E \alpha \Delta T ; \quad \langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad 2\varepsilon_{xy} \rangle ;$$

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$[C] = [D]^{-1} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; \quad \langle \varepsilon_{th} \rangle = (1+\nu) \alpha \Delta T \langle 1 \quad 1 \quad 0 \rangle$$

Contrainte plane : $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$; $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x,y)$; $\sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x,y)$; $\sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x,y)$;

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy} \rangle ; \quad \langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad 2\varepsilon_{xy} \rangle$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) + \alpha \Delta T ; \quad \langle \varepsilon_{th} \rangle = \alpha \Delta T \langle 1 \quad 1 \quad 0 \rangle ;$$

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} ; \quad [C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

RESOLUTION D'UN PROBLEME : CAS GENERAL

ETAPE 1 : IDENTIFIER LE PROBLEME

- Choisir un système de coordonnées et une numérotation des nœuds pour l'élément.
- Définir les degrés de liberté élémentaires $\{u^e\}$ et les sollicitations extérieures $\{f^e\}$ intervenant dans $[K^e]\{u^e\} = \{f^e\}$

$$\{u^e\}^T = \langle u^e \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad w_3 \quad \dots \rangle ;$$

$$\{f^e\}^T = \langle f^e \rangle = \langle f_{x1} \quad f_{y1} \quad f_{z1} \quad f_{x2} \quad f_{y2} \quad f_{z2} \quad f_{x3} \quad f_{y3} \quad f_{z3} \quad \dots \rangle$$

ETAPE 2 : CHOISIR DES FONCTIONS DE DEPLACEMENTS CONVENABLES : APPROXIMATION

Un modèle mathématique d'un système physique fait intervenir plusieurs variables ou fonctions, dites exactes $u_{ex}(x)$: températures, déplacements, potentiels, vitesse, etc. Celles-ci sont représentées par des fonctions "approchées" $u(x)$ telles que la différence : $e(x) = u(x) - u_{ex}(x)$ soit "petite" (de l'ordre de grandeur de la précision désirée).

Pour construire une fonction approchée, nous pouvons :

- 1) choisir un ensemble fini de fonctions dépendant de n paramètres a_i :

$$u(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$u(x) = P_1(x) a_1 + P_2(x) a_2 + \dots + P_n(x) a_n = \langle P \rangle \{a\}$$

Les fonctions sont souvent choisies de manière à être faciles à évaluer, à intégrer ou dériver explicitement. On choisit une fonction de déplacement qui définit de façon unique l'état de déplacement de tous les points de l'élément. Nous pourrions choisir une fonction polynomiale qui doit contenir un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté.

$$u(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1} = \sum_{i=1}^n a_i x^{i-1}$$

- 2) déterminer les paramètres $a_1, a_2, \dots, a_n$ en faisant coïncider $u_{ex}(x)$ et $u(x)$ en n points $x_1, x_2, \dots, x_n$, c'est-à-dire en annulant $e(x)$ en ces n points.

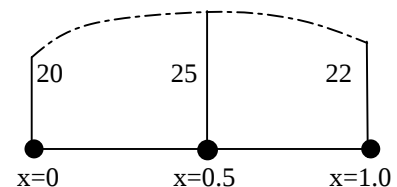
L'approximation peut fournir une solution approchée en tout point x d'une fonction difficile à évaluer ou connue seulement en certains points.

EXEMPLE : approximation d'une grandeur physique $u(x)$

Supposons qu'une température ne puisse être mesurée qu'en 3 points.

Nous avons besoin d'une valeur approchée en des points qui ne coïncident pas

avec les points de mesure. Choisissons une approximation sous la forme d'un polynôme du second degré :



$$u_{ex}(x) \approx u(x, a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

$$u_{ex}(x=0) = u(x=0) = a_1 = 20$$

$$u_{ex}(x=0.5) = u(x=0.5) = a_1 + 0.5 a_2 + 0.25 a_3 = 25$$

$$u_{ex}(x=1) = u(x=1) = a_1 + a_2 + a_3 = 22$$

D'où : $a_1 = 20$; $a_2 = 18$; $a_3 = -16$; $u_{ex}(x) \approx u(x) = 20 + 18x - 16x^2$

Alors au point $x = 0.7$ par exemple : $u(x=0.7) = 24.76$

En mécanique des solides 2D, l'état des déplacements en chaque point (x, y) de l'élément est décrit par :

$$\{u\} = [P(x, y)] \{a\}$$

où $\{a\}$ - vecteur des coefficients inconnus

$[P(x, y)]$ - matrices des fonctions d'approximation

ETAPE 3 : DISCRETISER LE CHAMP DE DEPLACEMENT CONTINU

RELIER LE DEPLACEMENT CONTINU AVEC LES DEPLACEMENTS NODAUX

En général, les paramètres $a_1, a_2, \dots, a_n$ n'ont pas de sens physique. Cependant nous pouvons choisir comme paramètres a_i les valeurs de la fonction $u_{ex}(x)$ en n points appelés NOEUDS de coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$. Imposons de plus que la fonction approchée $u(x)$ coïncide avec la fonction exacte $u_{ex}(x)$ en ces nœuds.

$$u(x_1) = u_{ex}(x_1) = u_1$$

$$u(x_2) = u_{ex}(x_2) = u_2$$

.....

$$u(x_n) = u_{ex}(x_n) = u_n$$

La fonction approchée (**approximation non nodale**)

$$u(x) = P_1(x) a_1 + P_2(x) a_2 + \dots + P_n(x) a_n = \langle P \rangle \{a\}$$

s'écrit alors (**approximation nodale**) :

$$u(x) = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2 + \dots + N_n(x) u_n = \langle N \rangle \{u^e\}$$

a_i - paramètres généraux de l'approximation ;

u_i - variables nodales de l'approximation

$P(x)$ - fonctions de base de l'approximation ;

$N(x)$ - fonctions d'interpolation

La méthode d'approximation nodale d'une fonction d'une variable s'étend directement à l'approximation de plusieurs fonctions de plusieurs variables.

EXEMPLE : déplacements d'une structure 3D

$$u(x,y,z) = \langle N(x,y,z) \rangle \{u_n\}$$

$$v(x,y,z) = \langle N(x,y,z) \rangle \{v_n\} \quad \boxed{\{u\} = [N] \{u^e\}}$$

$$w(x,y,z) = \langle N(x,y,z) \rangle \{w_n\}$$

En 3D, puisque $u(x, y, z)$ représente le déplacement en point (x, y, z) , les déplacements nodaux $\{u^e\}$ peuvent être obtenus à partir de $\{u\}$ en introduisant les coordonnées nodales convenables dans l'équation de l'étape 2.

Soit : $\{u_1\} = [P(x_1, y_1, z_1)] \{a\}$

En procédant de la même façon pour tous les nœuds de l'élément,

on obtient :

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} \{u_1\} \\ \{u_2\} \\ \vdots \\ \{u_n\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [P(x_1, y_1, z_1)] \\ [P(x_2, y_2, z_2)] \\ \vdots \\ [P(x_n, y_n, z_n)] \end{bmatrix} \{a\} = [P_n] \{a\}$$

Puisque le matrice $[P_n]$ est maintenant connue, nous pouvons écrire: $\{a\} = [P_n]^{-1} \{u^e\}$

Remplaçons $\{a\}$ par cette expression et reformulons l'équation $\{u\} = [P(x, y, z)] \{a\}$ pour obtenir la relation recherchée entre les déplacements continus $\{u\}$ et les déplacements nodaux $\{u^e\}$

$$\{u\} = [P(x, y, z)] [P_n]^{-1} \{u^e\} = [N(x, y, z)] \{u^e\}$$

Matrice des fonctions d'interpolation (fonctions de forme) : $[N(x, y, z)] = [P(x, y, z)] [P_n]^{-1}$

L'approximation nodale possède deux propriétés fondamentales :

- 1) comme $u(x_i) = u_i$, les fonctions N_i vérifient : $N_i(x_j) = \delta_{ij}$
- 2) l'erreur d'approximation s'annule en tous les nœuds x_i : $e(x_i) = 0$

EXEMPLE : Approximation nodale de type Lagrange à 4 nœuds en une dimension

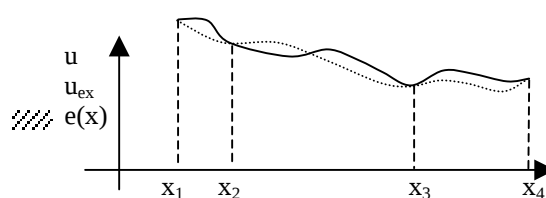
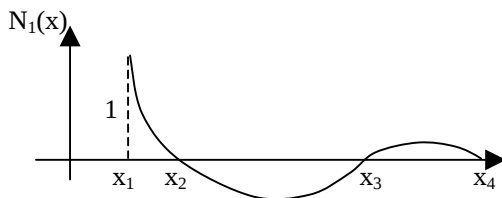
$$u(x) = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2 + N_3(x) u_3 + N_4(x) u_4$$

où N_i sont des polynômes de Lagrange du 3^e degré : $N_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^4 \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$

Par exemple $N_1(x)$ s'écrit : $N_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$

Si $x_1 = 1.0$, $x_2 = 2.0$, $x_3 = 5.0$, $x_4 = 7.0$, le graphe de la fonction $N_1(x)$ est le suivant :

$$N_1(x) = -\frac{1}{24} (x-2)(x-5)(x-7)$$



ETAPE 4 : RELATION ENTRE DEPLACEMENTS ET DEFORMATIONS

On relie maintenant les déformations $\varepsilon(x, y)$ du point (x, y) aux déplacements $\{u\}$ et donc aussi aux déplacements nodaux $\{u^e\}$.

Les déformations aux différents points de l'élément peuvent être obtenues à partir des fonctions de déplacement par une différenciation dont la forme dépend du type de problème traité. Dans le cas de petites déformations, on a:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

cas général : $\{\varepsilon\} = \{\text{différentielle de } u\}$

En utilisant l'équation de l'étape 3, nous obtenons : $\{\varepsilon\} = [\text{différentielle de } N(x, y)] \{u^e\}$

Posons : $[B(x, y)] = [\text{différentielle de } N(x, y)]$;

Alors :

$$\boxed{\{\varepsilon\} = [B] \{u^e\}}$$

- Problème axisymétrique $\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ u \\ r \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{Bmatrix}; [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} N_i & 0 \\ \dots & r \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix}; i = 1, nnel$

$nnel$: nombre de nœuds par élément

- Problème tridimensionnel $\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix}; [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \dots & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}; i = 1, nnel$

- Problème bidimensionnel (contrainte plane et déformation plane)

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}; [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \dots & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}; i = 1, nnel$$

ETAPE 5 : RELATIONS CONSTITUTIVES CONTRAINTES - DEPLACEMENTS

Dans le cas d'élasticité linéaire isotrope, nous utilisons la **Loi de Hooke**

$$\sigma = D \varepsilon = 2\mu \varepsilon + \lambda \text{tr}(\varepsilon)I$$

ou $\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$

soit $\sigma_{xx} = 2\mu \varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$

$$\sigma_{xy} = 2\mu \varepsilon_{xy}$$

Les autres peuvent s'obtenir par permutation circulaire des indices x, y, z. Sous forme matricielle, on a :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix}$$

où [D] est la **matrice d'élasticité** :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

- μ et λ : modules de Lamé $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$; $\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} \quad b = \frac{\nu}{1-\nu}; c = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

E : module de Young (dimension d'une contrainte) ; ν : coefficient de Poisson (sans dimension)

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Les caractéristiques élastiques doivent assurer que la matrice [D] est définie positive, ce qui conduit à $-1 < \nu < 0.5$

Si $\mu \neq 0$ et $3\lambda + 2\mu \neq 0$, on peut inverser la relation $\sigma = f(\varepsilon)$: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \text{trace}(\sigma) \delta_{ij} \right]$

- Déformation volumétrique : $\varepsilon_v = \Delta V/V = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$
- Contrainte hydrostatique : $\sigma_h = \kappa \varepsilon_v$

A partir de l'équation de l'étape 4, nous pouvons construire : $\{\sigma\} = [D][B]\{u^e\}$

Cas particuliers : problème 2D en déformations planes, en contraintes planes, problème axisymétrique (voir pages 5-6 pour les équations de base).

ETAPE 6 : RELIER LES CHARGES NODALES AUX DEPLACEMENTS NODAUX

Les contraintes internes $\sigma(x, y)$ sont remplacées par les charges nodales $\{f^e\}$ statiquement équivalentes, et ces dernières sont reliées aux déplacements nodaux $\{u^e\}$ définissant ainsi la matrice de rigidité $[K^e]$ de l'élément.

Pour déterminer les charges nodales statiquement équivalentes aux contraintes internes, on utilise :

Le PTV - Principe des Travaux Virtuels

Le PTV est une traduction sous forme intégrale de l'équilibre du solide soumis à l'action de sollicitations surfaciques et volumiques. A savoir $W_{\text{int}}^e = W_{\text{ext}}^e$

W_{ext}^e = travail virtuel extérieur des forces nodales

W_{int}^e = travail virtuel interne des contraintes

Expression matricielle de travaux virtuels :

$$W_{\text{int}}^e = \int_{V^e} \langle \delta \varepsilon \rangle [D] \{ \varepsilon \} dV + \int_{V^e} \langle \delta \varepsilon \rangle \{ \sigma_0 \} dV$$

$$W_{\text{ext}}^e = \int_{V^e} \langle \delta u \rangle \{ f_{vt} \} dV + \int_{S_f^e} \langle \delta u \rangle \{ f_s \} dS$$

Les forces $\{ f_{vt} \}$ tiennent compte des forces de volume, des forces d'amortissement et des forces d'inertie :

$$\{ f_{vt} \} = \{ f_v \} - c \{ \dot{u} \} - \rho \{ \ddot{u} \}$$

Les relations déformations-déplacements s'écrivent :

$$\{ \varepsilon \} = [B] \{ u^e \} ; \{ \delta \varepsilon \} = [B] \{ \delta u^e \} ; \langle \delta \varepsilon \rangle = \langle \delta u^e \rangle [B]^T$$

On obtient finalement :

$$W_{\text{int}}^e = \langle \delta u^e \rangle \left([K^e] \{ u^e \} - \{ f_{\sigma}^e \} \right)$$

$$W_{\text{ext}}^e = \langle \delta u^e \rangle \left(\{ f_{vs}^e \} - [C^e] \{ \dot{u}^e \} - [M^e] \{ \ddot{u}^e \} \right)$$

Ainsi

$$\boxed{\begin{aligned} [M^e] \{ \ddot{u}^e \} + [C^e] \{ \dot{u}^e \} + [K^e] \{ u^e \} &= \{ f^e \} \\ \text{avec } \{ f^e \} &= \{ f_{vs}^e \} + \{ f_{\sigma}^e \} \end{aligned}}$$

avec

$$\boxed{\begin{aligned} [K^e] &= \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dV \\ [C^e] &= \int_{V^e} c [N]^T [N] dV \\ [M^e] &= \int_{V^e} \rho [N]^T [N] dV \\ \{ f_{\sigma}^e \} &= - \int_{V^e} [B]^T \{ \sigma_0 \} dV \\ \{ f_{vs}^e \} &= \int_{V^e} [N]^T \{ f_v \} dV + \int_{S_f^e} [N]^T \{ f_s \} dS \end{aligned}}$$

$[K^e]$: matrice de rigidité élémentaire

$[C^e]$: matrice d'amortissement élémentaire

$[M^e]$: matrice de masse élémentaire

$\{ f_{vs}^e \}$: vecteur des forces (équivalentes) élémentaires dues aux forces de volume et de surface

$\{ f_{\sigma}^e \}$: vecteur des forces (équivalentes) élémentaires dues aux contraintes initiales et contraintes thermiques